Math. P.
514 f

Schüler

Analytische

# Geometrie des Raumes

nebst

## den Prinzipien der darstellenden Geometrie

unter besonderer

## Berücksichtigung des Imaginären

zum

Gebrauche an technischen Hochschulen und höheren technischen Schulen, sowie zum Selbstunterricht.

Mit zahlreichen Übungsaufgaben nebst Auflösungen

von

**Wilhelm Friedrich Schüler.**

---

Erster Band. — Erste Hälfte.

---

Mit vier Tafeln in Steindruck.

ANSBACH.

Druck und Verlag von C. Brügel und Sohn.

1884.

11 B

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# Inhalt.

## I. Geometrische Grundbegriffe.


| | | Seite. |
|---|---|---|
| 1. | Projectionen eines Punktes auf eine Ebene und auf eine Gerade | 1 |
| 2. | Winkel zweier Geraden, welche sich schneiden . . . | 2 |
| 3. | Winkel zweier sich nicht schneidenden Geraden . . . | 3 |
| 4. | Neigungswinkel zweier Ebenen . . . . . | 3 |
| 5. | Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene . . . | 4 |
| 6. | Projection einer Strecke auf eine Ebene . . . . | 4 |
| 7. | Projection einer Strecke auf eine Gerade . . . . | 5 |
| 8. | Von dem Sinne einer Strecke und ihren Projectionen auf Ebene und Gerade . . . . . | 6 |


## II. Von den Coordinatensystemen und den Coordinaten eines Punktes.


| | | |
|---|---|---|
| 9. | Das rechtwinklige Coordinatensystem . . . . . | 6 |
| 10. | Rechtwinklige Coordinaten eines Punktes . . . . | 8 |
| 11. | Zeichen für die Coordinaten eines Punktes . . . . | 8 |
| 12. | Coordinaten der Projectionen eines Punktes und der Punkte der projicierenden Perpendikel. Affinität . . . . | 11 |
| 13. | Coordinaten der Projectionen eines Punktes auf die Axen und der Punkte der projicierenden Ebene . . . . . | 12 |
| 14. | Construction eines Punktes . . . . . | 13 |
| 15. | Von dem Sinne einer Geraden im Coordinatensystem . . | 13 |
| 16. | Winkel einer Geraden mit den Coordinatenaxen . . . | 14 |
| 17. | Winkel einer Geraden mit den Coordinatenebenen . . | 18 |
| 18.* | Kugelcoordinaten . . . . . | 18 |
| 19.* | Polarcoordinaten eines Punktes . . . . . | 19 |
| 20.* | Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und Polarcoordinaten | 20 |
| 21. | Graphische Darstellung der Raumformen . . . . | 20 |
| 22. | Analytisches Gegenstück des Umklappungsprozesses . . | 22 |
| 23.* | Graphische Darstellung der Raumpunkte im Polarcoordinatensystem . . . . . | 24 |
| 24. | Interpretation der einfachsten Gleichungen . . . . | 27 |
| | Übungsaufgaben . . . . . | 30 |

## III. Der Punkt.

Seite.

25. Entfernung eines Punktes vom Ursprunge, ausgedrückt durch seine Coordinaten . . . . . 31
26. Entfernung zweier Punkte als Function ihrer Coordinaten. Richtung der Verbindungsgeraden . . . . . 35
27. Affine Strecken . . . . . 38
28. Die Coordinaten eines Punktes, welcher die Verbindungsstrecke zweier Punkte in dem Verhältnis $k = \frac{m}{n}$ teilt . . . 40
29.*Parameterverteilung auf einer Geraden. Die Punktreihe . 43
30.*Der unendlich ferne Punkt einer Geraden . . . . 45
31.*Harmonische Punkte . . . . . 47
32.*Gleichung des Punktes . . . . . 51
Übungsaufgaben . . . . . 57

## IV. Das Dreieck und das Polygon.

33. Winkel, den zwei vom Ursprung aus nach zwei Punkten gezogene Strahlen miteinander bilden . . . . . 63
34. Inhalt des Dreiecks, welches vom Coordinatenanfangspunkt und von den beiden vorigen Punkten gebildet wird . . 66
35. Inhalt und Winkel eines Dreiecks als Function der Coordinaten seiner Eckpunkte . . . . . 67
36. Zeichen eines Dreiecks . . . . . 71
37.*Aequipollente Strecken. Die Koppel . . . . . 74
38.*Resultante zweier Strecken. Kräftepolygon . . . . 75
39.*Componenten einer Strecke. Seilpolygon . . . . 78
40. Projection des Umfangs eines Dreiecks auf die Coordinatenaxen 80
41.*Projection des Umfangs eines Dreiecks auf eine beliebige Raumgerade . . . . . 81
42.*Projection des Umfangs eines geschlossenen Polygons auf die Coordinatenaxen und auf eine beliebige Gerade . . . 84
43.*Ermittelung der Resultante auf graphischem Wege . . 88
Übungsaufgaben . . . . . 90

## V. Von der Affinität.

44.*Erweiterung des Begriffs affiner Strecken . . . . 96
45.*Affine Punktreihen . . . . . 96
46.*Affine Punktreihen in allgemeiner Lage . . . . . 99
47.*Parametergleichung affiner Punktreihen . . . . . 100
48. Projection einer Punktreihe auf die Coordinatenaxen . . 105
49.*Analytische Darstellung affiner Punktreihen durch rechtwinklige Coordinaten . . . . . 108
50.*Allgemeine Gleichungen affiner Punktreihen . . . . 117
51.*Graphische Darstellung affiner Punktreihen . . . . 127

Seite.

52.*Dreiecke in perspectivisch-affiner Lage . . . . . 129
Übungsaufgaben . . . . . 134

VI. Die Raumgerade.

53. Gleichung der Geraden . . . . . 136
54. Die Gleichungen der Raumgeraden in der allgemeinen Form 143
55. Verwandlung der verschiedenen Gleichungsformen einer Raumgeraden ineinander . . . . . 148
56. Winkel zweier Geraden . . . . . 151
57. Schnittpunkt zweier Geraden . . . . . 153
58. Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, welche eine gegebene Gerade schneidet . . . . . 155
59. Constante in den Gleichungen einer Geraden . . . . . 157
60. Durchstofspunkte einer Geraden mit den Coordinatenebenen . 161
61. Spezielle Lagen einer Raumgeraden . . . . . 165
62. Eine Gerade von gegebener Richtung durch einen gegebenen Punkt zu ziehen . . . . . 168
63. Gerade durch einen Punkt, senkrecht zu einer andern Geraden 170
64. Gleichung einer Geraden, welche eine feste Gerade schneidet 172
65. Entfernung eines Punktes von einer Geraden . . . . 174
66. Gerade, welche zwei gegebene Gerade schneidet . . . 176
67.*Gerade, welche zwei gegebene Gerade unter rechten Winkeln schneidet . . . . . 179
68.*Gerade an drei und vier feste Gerade . . . . . 187
69. Graphische Darstellung einer Geraden im Raume . . . 198
70.*Coordinaten einer Geraden . . . . . 201
Übungsaufgaben . . . . . 208

NB. Die mit * versehenen Nummern können beim erstmaligen Durcharbeiten des Buches übergangen werden.

# Druckfehlerverzeichnis und Bemerkungen.

S. 4 Z. 14 v. o. ist »oder auf eine Gerade« zu streichen.
S. 17 Z. 4 v. o. ist $>$ zu setzen statt $<$.
S. 31 ist in den ersten Formeln $l''$ mit $l'''$ zu vertauschen.
S. 31 u. 35 setze Parallelepiped statt Parallelpiped.
S. 47 zweite Formel (2) $\frac{y}{x}$ statt $\frac{z}{x}$.
S. 58 Z. 14 v. o. $30^0$ statt 30.
S. 61 Z. 15 v. o. $60^0$ und $75^0$ statt 60 und 75.
S. 62 Z. 10 v. o. $180^0$ statt 180.
S. 78 Z. 13 v. u. Längeneinheit statt Längenheit.
S. 81 Z. 3 v. o. $s_3$ statt $s_1$ in der letzten Formel der zweiten Colonne.
S. 82 Z. 1 v. u. ist das erste »diese« zu streichen.
S. 84 Z. 5 v. o. paralleler statt parallerer.
S. 93 Z. 21 v. u. »die« statt »diese«.
S. 94 Z. 19 v. u. $y_k$ statt $y^k$.
S. 94 Z. 5 v. u. $x_n'$ statt $x_n$.
S. 104 Z. 11 v. u. ist die Formel mit (10) zu bezeichnen.
S. 129 Z. 2 v. o. $a < a'$ statt $a' < a$.
S. 136 Z. 6 v. u. mufs nach dem ersten Worte eingeschaltet werden: »wenn sie durch zwei Punkte bestimmt ist.«
S. 142 Z. 12, 13, 14 müssen in den beiden letzten Gliedern die entgegengesetzten Zeichen genommen werden.
S. 151 Z. 3 v. u. $A_1 a_1$ statt $A a_1$.
S. 152 Z. 6 v. o. $\sin^2 v$ statt $\sin v$.
S. 174 Z. 9 v. o. $x y$ statt $x_1 y$.
S. 178 Z. 5 v. o. schalte nach Funktionen »$m$ und $n$« ein.
S. 186 Z. 4 bezieht sich (26) auf die vorhergehende Formel.
S. 188 Z. 5 v. o. mufs stehen »Nummer 66« statt »voriger Nummer«.
S. 191 Z. 2 u. 9 muss stehen (10) statt (1).
S. 191 Z. 14 u. 18 mufs stehen (14) statt (15).
S. 192 Z. 3 v. o. und 11 v. u. setzen (10) statt (1).
S. 200 Z. 7 v. o. setzen $a_x$ statt $a^x$.

In Nr. 68 sind der Bequemlichkeit wegen die Indices der Constanten in den Formeln (1) von (10) ab um 1 erhöht.

Das Wort »Affinität« stellt nicht mehr den allgemeinen Begriff einer geometrischen Verwandtschaft dar, wie dies früher der Fall war, sondern nur noch eine Species, daher der Gebrauch desselben als Bestimmungswort.

In Aufg. 17 Seite 93 ist die in der Figur 37 vorhandene siebente Seite $g$ des Kräftepolygons aufzuführen übersehen worden.

# I. Geometrische Grundbegriffe.

## 1.

**Projectionen eines Punktes auf eine Ebene und auf eine Gerade.** Wenn man von einem Punkte ein Perpendikel fällt auf eine Ebene, so heisst der Fusspunkt dieses Perpendikels die orthogonale Projection des Punktes auf diese Ebene, die letztere selbst nennt man Projectionsebene und das Perpendikel nennt man projicierendes Perpendikel.

Der Fusspunkt des Perpendikels, das man von einem Punkte auf eine Gerade fällen kann, heisst die Projection dieses Punktes auf diese Gerade.

Liegt der zu projicierende Punkt auf der Projectionsebene oder auf der Projectionsgeraden selbst, so fallen die beziehungsweisen Projectionen mit ihm zusammen.

In Fig. 2 ist $P'$ die Projection des Punktes $P$ auf die Ebene $E$ und gleichzeitig Projection der in $E$ liegenden Punkte $P$ auf die Gerade $P'P$. Hiernach versteht es sich von selbst, dass alle Punkte, welche in einer zu der Projectionsebene senkrechten Geraden liegen, in dieser Ebene dieselbe Projection haben und dass alle Punkte einer eine Gerade senkrecht schneidenden Ebene in dieser Geraden dieselbe Projection haben, nämlich den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.

Um die Ausführung der Projection einer Strecke auf eindeutigem Wege zu sichern und dieselbe algebraisch betätigen zu können, ist es notwendig, vorher Festsetzungen darüber zu machen, was man unter dem Winkel zu verstehen habe, den eine Gerade mit einer Geraden oder eine Gerade mit einer Ebene oder eine Ebene mit einer Ebene bildet.

## 2.

**Winkel zweier Geraden, welche sich schneiden.** An einer Raumgeraden unterscheidet man in der Elementargeometrie zweierlei Bestimmungsstücke: ihre Richtung und ihre Lage. Alle zueinander parallelen Linien haben dieselbe Richtung, so dass man also nur noch einen Punkt anzugeben braucht, um eine Gerade von gegebener Richtung auch der Lage nach zu fixieren.

Zieht man durch einen Raumpunkt zwei Gerade von verschiedener Richtung, so bilden dieselben vier Winkel mit einander, welche paarweise einander gleich sind. Welchen von den zwei verschiedenen Winkeln man als den Neigungswinkel der zwei Geraden bezeichnen will, bleibt völlig willkürlich. Die Aufgabe, eine gegebene Gerade durch eine andere unter einem gegebenen Winkel zu schneiden, lässt also zwei Lösungen zu. (Fig. 3).

Unzweideutiger gestaltet sich aber die Sache, wenn man als drittes Bestimmungsstück einer Geraden noch den Sinn hinzunimmt, in welchem dieselbe zu durchlaufen ist. Zwei Gerade, welche gleiche Richtung und gleiche Lage, aber entgegengesetzten Sinn haben, sind dann als zwei verschiedene Gerade zu betrachten. Weil aber die eine durch die andere gegeben ist, so nennen wir sie zueinander conjugiert.

Wenn es sich also jetzt darum handelt, den Winkel zwischen zwei Geraden zu bestimmen, so muss ausser der Richtung und Lage auch noch der Sinn der beiden Geraden festgesetzt sein; derselbe wird in der Regel durch einen Pfeil angedeutet.

Unter dem Winkel zweier durch Richtung, Lage und Sinn gegebenen, sich schneidenden Geraden, versteht man den **concaven** Winkel, den jene Winkelschenkel mit einander bilden, die **vom Scheitel aus** in dem vorgeschriebenen Sinne gezogen sind.

Hiernach bilden zwei conjugierte Gerade oder zwei parallele Gerade, welche entgegengesetzten Sinn haben, einen Winkel von $180^0$ unter einander. Fig. 4 gibt die vier Winkel, welche man erhält, wenn man einer jeden der beiden sich schneidenden Geraden bald den einen, bald den anderen Sinn beilegt. Es ist also jetzt augenscheinlich, dass durch die vorige Definition des Winkels zweier sich schneidenden Geraden derselbe unzweideutig bestimmt ist.

Wird eine Gerade dazu benützt, um auf ihr von einem festen Anfangspunkte aus Strecken als geometrische Repräsentanten von Zahlen aufzutragen, so nennt man den Sinn, in welchem die positiven Zahlen aufgetragen werden, den positiven Sinn der Geraden, den entgegengesetzten Sinn also negativ.

### 3.

**Winkel zweier sich nicht schneidenden Geraden.** Man versteht darunter den Winkel, den man erhält, wenn durch einen beliebigen Punkt des Raumes zwei Gerade gezogen werden, welche mit den gegebenen Geraden der Richtung und dem Sinne nach übereinstimmen.

### 4.

**Neigungswinkel zweier Ebenen.** Eine Ebene ist in der gewöhnlichen Geometrie gegeben durch ihre Stellung und ihre Lage. Bei alleiniger Annahme dieser Bestimmungsstücke einer Ebene versteht man unter dem Winkel zweier Ebenen das Supplement des Neigungswinkels der Perpendikel, welche man von irgend einem Raumpunkte auf die beiden Ebenen fällen kann. Es gibt also auch hier zwei Winkel, die einander zu $180^0$ ergänzen. — Um den Winkel zweier Ebenen unzweideutig bestimmen zu können, ist noch ein drittes Bestimmungsstück für die Ebene notwendig. Man unterscheidet nämlich an jeder Ebene noch zwei Seiten, und deutet dieselbe an durch Perpendikel, welche nach der einen oder der anderen Seite derselben errichtet werden und die man desshalb mit Pfeilen versieht, wie Fig. 5 zeigt. Die Richtung eines Pfeiles gibt dann auch den Sinn der Rotation der Ebene in sich an. Legt man nämlich an den Fusspunkt des Perpendikels eine Uhr mit dem Zifferblatt nach der Richtung des Pfeiles, dann ist die Rotation angezeigt durch die Bewegung der Zeiger. Zieht man (Fig. 6) nun durch einen beliebigen Raumpunkt zwei Gerade, welche der Richtung und dem Sinne nach mit diesen Perpendikeln übereinstimmen, so bestimmen diese Geraden den Neigungswinkel der beiden Ebenen nach (**3**).

Zwei Ebenen, welche nach Lage und Stellung übereinstimmen, aber verschiedene Seiten haben, nennt man conjugierte Ebenen. Solche

bilden also einen Winkel von $180^0$, ebenso parallele Ebenen von entgegengesetzter Seite. Dient das auf einer Ebene errichtete Perpendikel dazu, die Zahlen durch Strecken darzustellen, so wird das Perpendikel positiv oder negativ genannt, je nachdem es zur Darstellung der positiven oder negativen Zahlen dient. Diejenige Seite der Ebene, welche durch das positive Perpendikel angezeigt ist, heisst positiv und die entgegengesetzte negativ, wofür auch die Namen Vorder- und Rückseite gebräuchlich sind. Hiernach ist klar, dass, wenn eine Gerade und eine Ebene gegeben sind, durch den positiven Sinn der ersteren die positive Seite der letzteren gegeben ist und umgekehrt, indem der positive Sinn des auf der Ebene zu errichtenden Perpendikels mit dem positiven Sinn der Geraden übereinstimmen muss.

## 5.

**Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene.** Man zieht (Fig. 7) durch einen beliebigen Punkt des Raumes zwei Gerade, welche in Richtung und Sinn mit der gegebenen Geraden und mit dem die Seite der Ebene bestimmenden Perpendikel übereinstimmen. Diese bestimmen dann den gesuchten Winkel.

## 6.

**Projection einer Strecke auf eine Ebene oder auf eine Gerade.** Unter der Projection einer Strecke auf eine Ebene versteht man die Entfernung $l'$ der Projectionen der Endpunkte der Strecke. Errichtet man also in zwei Punkten $p$ und $p'$ einer Ebene Perpendikel und verbindet dann irgend zwei Punkte dieser letzteren durch eine Strecke, so ist die Projection einer solchen Strecke gleich der Entfernung der Punkte $p$ und $p'$. Wählt man (Fig. 8) als den einen jener Punkte den Fusspunkt $p$ des ersten Perpendikels und als den zweiten einen beliebigen Punkt des zweiten Perpendikels, so ist offenbar

$$l' = l \cos \alpha$$

wenn $\alpha$ der Winkel ist, den die Strecke $l$ mit der Projectionsebene und also auch mit ihrer Projection $l'$ bildet. Ist nun $l$ eine Strecke von beliebiger Lage gegen die Projectionsebene, so ist nach der

oben gemachten Bemerkung ihre Projection $l'$ gegeben durch die vorstehende Formel. Dies folgt auch aus dem Satze, dass die Projectionen einer Strecke auf parallele Ebenen einander gleich sind. Legt man nämlich durch den einen Endpunkt der Strecke $l$ eine Ebene parallel zur Projectionsebene, so ist ihre Projection auf die Parallelebene gegeben durch die so eben aufgestellte Formel. Es ist also nach dem angezogenen Satze auch die Projection auf die eigentliche Projectionsebene durch diese Formel gegeben.

Wir können daher jetzt den Satz aussprechen:

Die Projection einer Strecke auf eine Ebene ist gleich dieser Strecke, multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den die die Strecke enthaltende Gerade mit der Projectionsebene bildet.

## 7.

**Projection einer Strecke auf eine Gerade.** Man erhält die Projection einer Strecke auf eine Gerade, wenn man die Endpunkte der Strecke auf die Gerade projiciert; die zwischen den Fusspunkten der projicierenden Perpendikel liegende Strecke ist die gesuchte Projection. Hieraus erkennt man, dass alle Strecken, welche zwischen zwei Ebenen liegen, die auf einer Geraden senkrecht stehen, in Bezug auf letztere dieselben Projectionen haben.

Weiter ist klar, dass die Projectionen einer Strecke auf parallele Geraden einander gleich sind; denn die verschiedenen Perpendikel, welche einen beliebigen Punkt der zu projicierenden Strecke auf die Geraden projicieren, liegen in einer zu den letzteren senkrechten Ebene. Es sind folglich die Projectionen der Endpunkte der Strecke in zwei zu einander parallelen Ebenen enthalten, und da sie überdies paarweise auf parallelen Geraden liegen, so sind die von ihnen begrenzten Strecken einander gleich.

Jede der parallelen Projectionsgeraden bildet aber mit der Geraden, in welcher die zu projicierende Strecke enthalten ist, denselben Winkel. Derselbe sei $\alpha$. Wenn man also durch den einen Endpunkt der Strecke $l$ eine parallele Linie zieht mit der Projectionsgeraden, so ist, wie leicht ersichtlich, ihre Projection $l'$ auf diese Parallele gegeben durch

$$l' = l \cos \alpha$$

Daher der Satz:

Die Projection einer Strecke auf eine Gerade ist gleich dieser Strecke, multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels der die Strecke enthaltenden Geraden mit der Projectionsgeraden.

### 8.

**Von dem Sinne einer Strecke und ihren Projectionen auf Ebene und Gerade.** Eine Strecke von der Länge $l$ wird mit

$$+ l \text{ oder } - l$$

bezeichnet, je nachdem dieselbe in dem positiven oder negativen Sinn der durch sie bestimmten Geraden gemessen wurde. Die Vorzeichen + oder — bedeuten also keineswegs eine positive oder negative Länge, sondern lediglich den positiven oder negativen Sinn der Strecke. Hiernach versteht es sich von selbst, dass bei der Aufstellung der Projectionsgleichung einer Strecke die Länge derselben nur dem numerischen Werte nach in Betracht gezogen werden darf, und dass also der Sinn der Strecke berücksichtigt werden muss bei Bestimmung des Winkels, den dieselbe mit der Projectionsebene oder mit der Projectionsgeraden bildet. Nach (4) ist der positive Sinn der Strecke durch die positive Seite der Projectionsebene bestimmt. Dies vorangeschickt, erläutert Fig. 9 die Projectionen einer Strecke auf die Vorder- und Rückseite einer Ebene und Fig. 10 die Projectionen einer Strecke auf eine Gerade, während Fig. 11 die Projection eines Dreiecks, mit der wir uns später eingehender beschäftigen werden, veranschaulicht. Aus der gegebenen Darstellung geht der wichtige Satz hervor, dass der Sinn einer Strecke durch Projection derselben nicht geändert wird.

## II. Von den Coordinatensystemen und den Coordinaten eines Punktes.

### 9.

**Das rechtwinklige Coordinatensystem.** Fig. 1. Dasselbe besteht aus drei festen, zu einander senkrechten Ebenen, welche Coordinatenebenen heissen. Die drei Geraden, in welchen sich die

letzteren schneiden, nennt man die Coordinatenaxen und der Durchschnittspunkt $O$ der drei Ebenen heisst Coordinatenanfangspunkt oder Ursprung des Coordinatensystems. Man bezeichnet die Axen mit $x$, $y$, $z$ und nennt sie beziehungsweise $x$ Axe, $y$ Axe und $z$ Axe. Die Coordinatenebenen benennt man nach den beiden Axen, die in ihnen liegen, mit: die Ebene der $xy$, die Ebene der $xz$, und die Ebene der $yz$. — An jeder Coordinatenaxe unterscheidet man zwei Richtungssinne, die man als positiv und negativ bezeichnet hat, weil zwei in verschiedenem Sinne genommene Strecken, welche auf einer dieser Axen liegen, sich zu einander verhalten, wie die sogenannten positiven und negativen Zahlen in der Algebra. Die Festsetzung des positiven Richtungssinnes einer Axe ist willkürlich, der negative Sinn ist dem positiven entgegengesetzt.

Denkt man sich in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die $xy$ Ebene horizontal und so gelegt, dass für einen aufrechtstehenden Beschauer, der sich im Ursprunge des Coordinatensystemes befindet, die $x$ Axe von rechts nach links sich erstreckt, dann verläuft die $y$ Axe von vorn nach hinten und die $z$ Axe von oben nach unten. Man nennt nun gewöhnlich „links nach rechts“, „hinten nach vorne“, „unten nach oben“ den positiven Sinn beziehungsweise der $x$ Axe, der $y$ Axe und der $z$ Axe. Der negative Sinn ist also: bei der $x$ Axe der von „rechts nach links“, bei der $y$ Axe der von „vorne nach hinten“, und bei der $z$ Axe der von „oben nach unten.“

Es ist Regel, dass man beim Durchlaufen einer Strecke von jenem ihrer Endpunkte ausgeht, welcher dem Coordinatenanfangspunkt am nächsten liegt. Es ist ferner eine durch den Gebrauch festgestellte Regel, dass man die Buchstaben $x$, $y$, $z$, welche die Axen bezeichnen, auf die vom Coordinatenanfangspunkte aus in positivem Sinne durchlaufenen Teile derselben schreibt, so dass also

$$Ox, \quad Oy, \quad Oz$$

immer den positiven Sinn der betreffenden Coordinatenaxe angeben. Man bezeichnet desshalb diese Hälften der Axen wohl auch mit

$$+x, \quad +y, \quad +z$$

und die andern Hälften mit

$$-x, \quad -y, \quad -z.$$

Die Coordinatenebenen teilen den Raum in acht körperliche Winkel, die man Oktanten nennt, und wie folgt bezeichnet:

| | | |
|---|---|---|
| $O(+x, +y, +z)$ | oder | I |
| $O(-x, +y, +z)$ | „ | II |
| $O(-x, -y, +z)$ | „ | III |
| $O(+x, -y, +z)$ | „ | IV |
| $O(+x, -y, -z)$ | „ | V |
| $O(+x, +y, -z)$ | „ | VI |
| $O(-x, +y, -z)$ | „ | VII |
| $O(-x, -y, -z)$ | „ | VIII |

## 10.

**Rechtwinklige Coordinaten eines Punktes.** Unter den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $P$ (Fig. 12) versteht man:

a) die Zahlen, welche die senkrechten Entfernungen $PP'$, $PP''$, $PP'''$ des Punktes von den drei Ebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bestimmen, oder

b) die Projectionen $OA$, $OB$, $OC$ des Radiusvector des Punktes auf die Coordinatenaxen, *) oder endlich

c) die Stücke $OA$, $OB$, $OC$, welche drei durch den Punkt gelegte, zu den Coordinatenebenen beziehungsweise parallele Ebenen $PP'AP''$, $PP'BP'''$, $PP''CP'''$ auf den Coordinatenaxen abschneiden.

Die Coordinaten eines Punktes sind mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Projectionen des Punktes auf den bezüglichen Coordinatenaxen vom Ursprunge aus im positiven oder im negativen Sinne gelegen sind.

## 11.

**Zeichen für die Coordinaten eines Punktes.** In der Auffassung der Coordinaten, wie sie unter a) der vorigen Nummer gegeben wurde, werden dieselben benannt nach den Axen, zu denen

*) Anmerkung. Unter Radiusvector eines Punktes versteht man seine Entfernung vom Coordinatenanfang.

die Entfernungen parallel sind, in den beiden Auffassungen unter b) und c) dagegen nach den Axen, auf welchen die betreffenden Stücke sich befinden. Es ist aber klar, dass die Coordinaten eines Punktes, einerlei ob sie nach a), b) oder c) bestimmt werden, immer durch dieselben drei Zahlen sich ausdrücken. Die zur $x$ Axe gehörige Coordinate eines Punktes wird mit dem Buchstaben $x$, die zur $y$ Axe gehörige mit $y$, und die zur $z$ Axe gehörige mit $z$ bezeichnet. Es bedeuten also in der Folge $x$, $y$, $z$ immer die Coordinaten eines Punktes, mit andern Worten: wenn wir diese Zeichen sehen oder benützen, so haben wir mit ihnen immer den oben aufgestellten Coordinatenbegriff zu verbinden. In der analytischen Geometrie des Raumes haben daher alle Punkte das mit einander gemein, dass sie durch die Zeichen $x$, $y$, $z$, also durch ihre Coordinaten dargestellt werden. Das sie von einander Unterscheidende wird durch die speziellen Werte, welche ihre Coordinaten haben, ausgedrückt. Sind die letzteren beziehungsweise $a$, $b$, $c$, so ist es notwendig, dass man schreibe

$$x = a \quad y = b \quad z = c$$

um zu wissen, welche von den drei Zahlen $a$, $b$, $c$ die $x$, die $y$ und die $z$ Coordinate des durch sie bestimmten Punktes ist. Man sagt deshalb: die drei Gleichungen stellen einen Punkt dar, dessen Coordinaten die Werte $a$, $b$, $c$ haben, und nennt sie die Gleichungen dieses Punktes. Nimmt man keine Rücksicht auf die Vorzeichen von $a$, $b$, $c$, so gibt es (Fig. 13) acht Punkte, welche den Gleichungen entsprechen, nämlich in jedem Oktanten einen solchen. Um also einen Punkt, dessen Coordinaten $a$, $b$, $c$ sind, in Bezug auf seine Lage im Coordinatensystem durch Zahlen unzweideutig zu kennzeichnen, hat man seinen Coordinaten die ihnen nach (8) und (9) zugehörigen Vorzeichen beizufügen. Thut man diess, so ergeben sich folgende Gleichungssysteme zur Darstellung der acht Punkte:

$$\begin{array}{llll} x_1 = +a & x_2 = -a & x_3 = -a & x_4 = +a \\ y_1 = +b & y_2 = +b & y_3 = -b & y_4 = -b \\ z_1 = +c & z_2 = +c & z_3 = +c & z_4 = +c \end{array}$$

$$x_5 = +a \quad x_6 = +a \quad x_7 = -a \quad x_8 = -a$$
$$y_5 = -b \quad y_6 = +b \quad y_7 = +b \quad y_8 = -b$$
$$z_5 = -c \quad z_6 = -c \quad z_7 = -c \quad z_8 = -c$$

Wir sind also jetzt im Stande jeden Punkt mit Hilfe seiner, dem Werte und dem Vorzeichen nach gegebenen, Coordinaten durch drei Gleichungen eindeutig darzustellen; denn eine jede dieser drei Gleichungen enthält eine bestimmte Aussage über den Wert und das Vorzeichen der betreffenden Coordinate des Punktes.

Die Gleichungen der folgenden Punkte sind von besonderer Wichtigkeit:

des Coordinatenanfangspunktes:

$$x = o \quad y = o \quad z = o$$

eines Punktes der $xy$ Ebene:

$$x = a \quad y = b \quad z = o$$

eines Punktes der $xz$ Ebene:

$$x = a \quad y = o \quad z = c$$

eines Punktes der $yz$ Ebene:

$$x = o \quad y = b \quad z = c$$

eines Punktes der $x$ Axe:

$$x = \alpha \quad y = o \quad z = o$$

eines Punktes der $y$ Axe:

$$x = o \quad y = \beta \quad z = o$$

eines Punktes der $z$ Axe:

$$x = o \quad y = o \quad z = \gamma.$$

Es ist gebräuchlich den Punkt mit den Gleichungen $x = a$, $y = b$, $z = c$, wenn es der Zweck erlaubt, kurz durch $(a, b, c)$, zu bezeichnen, wobei dann stillschweigend vorausgesetzt wird, dass $a$ die $x$ Coordinate, $b$ die $y$ Coordinate und $c$ die $z$ Coordinate des Punktes bedeutet. Es ist dann $(o, o, o)$ der Anfangspunkt $o$ des Coordinatensystems; $(a, b, o)$; $(a, o, c)$; $(o, b, c)$ sind Punkte beziehungsweise der $xy$, der $xz$ und der $yz$ Ebene; $(\alpha, o, o)$; $(o, \beta, o)$; $(o, o, \gamma)$ bedeuten Punkte beziehungsweise der $x$, der $y$ und der $z$ Axe.

## 12.

**Coordinaten der Projectionen eines Punktes und der Punkte der projicierenden Perpendikel. Affinität.** Nach der vorigen Nummer sind

$$x = a \quad y = b \quad z = o$$

die Gleichungen eines Punktes der $xy$ Ebene, welcher von der $yz$ Ebene (also in der $xy$ Ebene von der $y$ Axe) den Abstand $a$ und von der $xz$ Ebene (also in der Ebene der $xy$ von der $x$ Axe) den Abstand $b$ hat. Errichtet man nun in diesem Punkte ein Perpendikel, so ist klar, dass jeder Punkt in letzterem die Coordinaten $x = a$, $y = b$ hat, und dass sich deshalb die verschiedenen Punkte eines auf der $xy$ Ebene errichteten Perpendikels nur durch die $z$ Coordinate von einander unterscheiden. Es ist also $(a, b, c)$ ein solcher Punkt. Die vorstehenden Gleichungen können also aufgefasst werden als die Gleichungen des gemeinschaftlichen Projectionspunktes der Punkte dieses Perpendikels für die $xy$ Ebene als Projectionsebene, insbesondere als die Gleichungen der Projection des Punktes $(a, b, c)$ auf die $xy$ Ebene. Fällt man von dem Punkte $(a, b, c)$ eine Senkrechte auf die $yz$ Ebene, so haben alle Punkte dieser Senkrechten dieselbe $y$ Coordinate und auch dieselbe $z$ Coordinate wie der Punkt $(a, b, c)$, und nur ihre $x$ Coordinaten sind verschieden. Die Gleichungen ihres gemeinschaftlichen Projectionspunktes in der $yz$ Ebene und insbesondere die des Punktes $(a\ b\ c)$ sind daher:

$$x = o \quad y = b \quad z = c$$

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass

$$x = a \quad y = o \quad z = c$$

die Gleichungen der Projection des Punktes $(a, b, c)$ auf die $xz$ Ebene sind.

Man merke daher:

a) Die Projection eines Punktes auf eine Coordinatenebene hat mit dem Punkte **zwei** Coordinaten gemein, nämlich jene beiden, nach welchen die Projectionsebene den Namen führt; die dritte Coordinate ist der Null gleich;

b) Je zwei Projectionen eines Punktes haben immer eine Coordinate gemeinschaftlich, nämlich jene, deren Zeichen den Benennungen der beiden Projectionsebenen gemeinschaftlich ist;

c) Die Punkte einer mit einer Axe parallelen Geraden haben zwei Coordinaten gemeinschaftlich und nur die dritte, welche den Namen der Axe trägt, ist verschieden.

Zwischen dem Raumpunkte und seinen orthogonalen Projectionen, dann zwischen den letzteren untereinander, findet also eine Verwandtschaft statt, die analytisch dadurch gekennzeichnet ist, dass der Raumpunkt mit seinen Projectionen je zwei, die letzteren unter sich je eine Coordinate gemeinschaftlich haben. Man nennt die Verwandtschaft, deren Keime in diesen Bemerkungen enthalten sind, Affinität. Die orthogonalen Projectionen eines Punktes stehen zu ihm und unter sich in der Verwandtschaft der Affinität.

## 13.

**Coordinaten der Projectionen eines Punktes auf die Axen und der Punkte der projicierenden Ebene.** Legt man durch den Punkt $(a, b, c)$ eine Ebene senkrecht zur $x$ Axe, so haben alle Punkte dieser Ebene den Abstand $a$ von der $yz$ Ebene und unterscheiden sich folglich nur durch die $y$ und $z$ Coordinaten von einander. Die letzteren haben aber nach (**11**) für den Schnittpunkt jener Ebene mit der $x$ Axe, also für die Projection des Punktes $(a, b, c)$ auf diese Axe, den Wert Null.

Es sind also:

$$x = a \quad y = o \quad z = o$$

die Coordinaten der genannten Projection.

Auf gleiche Weise findet man

$$x = o \quad y = b \quad z = o$$

und

$$x = o \quad y = o \quad z = c$$

als die Gleichungen der Projectionspunkte des Punktes $(a, b, c)$ auf die $y$, beziehungsweise $z$ Axe.

Wir können daher sagen:

Für alle Punkte einer zu einer Coordinatenaxe senkrechten Ebene hat die nach dieser Axe benannte Coordinate denselben Wert.

## 14.

**Construction eines Punktes.** Sind die Coordinaten eines Punktes $x = a$, $y = b$, $z = c$ gegeben, so wird derselbe construiert als der Durchschnittspunkt dreier Ebenen, die mit den Coordinatenebenen parallel sind und beziehungsweise von der $yz$ Ebene den Abstand $a$, von der $xz$ Ebene den Abstand $b$ und von der $xy$ Ebene den Abstand $c$ haben.

Nach (**12**a) kann man die Construction auch dadurch ausführen, dass man auf der $xy$ Ebene den Punkt $x = a$, $y = b$ construiert, und in ihm ein Perpendikel von der Länge $c$ errichtet, in dem durch das Vorzeichen von $c$ vorgeschriebenen Sinne, oder auch, dass man auf der $xz$ Ebene den Punkt $x = a$, $z = c$ sucht, und in ihm das Perpendikel $b$ errichtet, oder endlich, dass man in der $yz$ Ebene den Punkt $y = b$, $z = c$ bestimmt und in ihm die Senkrechte von der Länge $a$ zieht.

## 15.

**Von dem Sinne einer Geraden im Coordinatensystem.** Schneidet eine auch dem Sinne nach gegebene Gerade eine Ebene von bestimmter Seite, so kann nach (**4**) festgestellt werden, ob der Sinn der Geraden positiv oder negativ zu nehmen sei. Nach derselben Nummer hat die $xy$ Ebene ihre positive Seite nach der positiven $z$ Axe und die positiven Seiten der $zy$ und $zx$ Ebene sind beziehungsweise durch die positive $x$ und $y$ Axe bestimmt.

Für eine Gerade, welche Fig. 19 die $xy$ Ebene im Punkte $g_1$, die Ebene $xz$ im Punkte $g_2$ und die $yz$ Ebene im Punkte $g_3$ trifft, muss also, wenn $g_2$ unterhalb und $g_3$ oberhalb der $xy$ Ebene liegt, der Sinn $g_1\ g_3\ g_2$ der positive Sinn sein in Rücksicht auf die $xy$ Ebene. Bezüglich der $xz$ Ebene wäre der positive Sinn derselben $g_2\ g_1\ g_3$ und rücksichtlich der $yz$ Ebene wäre ihr positiver Sinn angegeben durch die Buchstabenfolge $g_3\ g_1\ g_2$. Die beiden ersten Aufeinanderfolgen stimmen mit einander überein,

aber nicht mit der letzten Aufeinanderfolge $g_3\ g_1\ g_2$. Wenn also auch für jede Raumgerade in Rücksicht auf eine Coordinatenebene der positive Richtungssinn bestimmt ist, so lässt derselbe sich doch nicht mehr angeben, wenn man die Gerade hinsichtlich ihrer Lage zum ganzen Coordinatensystem betrachtet. Daraus folgt, dass der positive Sinn einer Raumgeraden durch die Festsetzung des positiven Sinnes der Coordinatenaxen nicht mitbestimmt ist und daher willkürlich bleibt. Eine Ausnahme hievon machen nur die Geraden, welche mit den Coordinatenaxen parallel sind.

Hienach ist klar, dass einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden zwar allemal ein besonderer Sinn beigelegt werden kann, dass es aber freigestellt ist, diesen Sinn positiv oder negativ zu nennen.

Daher ist auch jede vom Coordinatenanfangspunkt aus gezogene Strecke (Radiusvektor) ohne Rücksicht auf den Sinn zu messen, also nur dem absoluten Werte nach. Nur die Coordinaten machen hievon eine Ausnahme.

**16.**

**Winkel einer Geraden mit den Coordinatenaxen.** Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Geraden, deren Neigungswinkel gegen die Axen bestimmt werden soll, ein bestimmter Sinn beigelegt ist oder nicht. In beiden Fällen versteht man unter den Winkeln, welche die Gerade mit den Axen bildet, nach (3) jene Winkel, welche ein vom Coordinatenanfangspunkt aus in dem Richtungssinne der gegebenen Geraden gezogener Strahl mit den positiven Halbaxen des Coordinatensystems einschliesst. In dem Falle, dass der Geraden ein bestimmter Sinn zukömmt, sind diese Winkel unzweideutig bestimmt, im andern Falle erhält man zwei Winkel, die einander zu $180^0$ ergänzen. In der Regel zieht man dann behufs Herstellung der Eindeutigkeit den Strahl so, dass derselbe einen spitzen Winkel mit der $z$ Axe macht, also oberhalb der horizontal gedachten $xy$ Ebene verläuft. Die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, welche ein vom Coordinatenanfangspunkt ausgehender Strahl mit den positiven Halbaxen hinsichtlich ihres Verhältnisses zum rechten Winkel bilden kann, sind in nachstehender Tabelle aufgezeichnet:

| Oktant. | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| I. | spitz. | spitz. | spitz. |
| IV. | spitz. | stumpf. | spitz. |
| III. | stumpf. | stumpf. | spitz. |
| II. | stumpf. | spitz. | spitz. |
| VI. | spitz. | spitz. | stumpf. |
| V. | spitz. | stumpf. | stumpf. |
| VIII. | stumpf. | stumpf. | stumpf. |
| VII. | stumpf. | spitz. | stumpf. |

Wenn es sich also jetzt umgekehrt um die Lösung der Aufgabe handelt, durch den Coordinatenanfangspunkt einen Strahl zu ziehen, welcher mit den Axen gegebene Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einschliesst, so hat man mit Hilfe obiger Tabelle zunächst zu untersuchen, in welchem Oktanten der Strahl verlaufen muss. Ist beispielsweise jeder der Winkel $\alpha$ und $\beta$ kleiner als $90^0$, dagegen $\gamma$ grösser als $90^0$, so ersieht man aus der Tabelle, dass der Strahl im sechsten Octanten sich erstrecken muss, wenn er überhaupt existiert. Letzterer Zweifel rührt daher, dass die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ihrer Grösse nach nicht beliebig gewählt werden dürfen. Würde z. B. $\alpha = \beta = \gamma = 45^0$ gewählt, so könnte man den Strahl nicht construieren. Derselbe müsste nämlich, da alle Winkel spitz sind, im Oktanten I. verlaufen. Nun ist aber klar, dass ein Strahl, welcher mit den Axen der $x$ und $y$ Winkel von $45^0$ bildet, den Winkel zwischen diesen beiden Axen halbiert, und folglich in der $xy$ Ebene liegt. Er bildet daher mit der $z$ Axe einen Winkel, nicht wie angenommen von $45^0$, sondern einen solchen von $90^0$. An diesem Beispiele ist ersichtlich, dass der dritte Winkel $\gamma$ durch die beiden Winkel $\alpha$ und $\beta$ schon mitbestimmt ist. In der That bilden alle Geraden, welche mit der $x$ Axe den Winkel $\alpha$ bilden, eine Kegelfläche. Eine zweite Kegelfläche wird von allen Geraden, welche mit der $y$ Axe den Winkel $\beta$ einschliessen, gebildet. Beide Kegelflächen durchdringen sich in zwei Geraden. Jede dieser Geraden bildet mit den Axen der $x$ und $y$ beziehungsweise die Winkel $\alpha$ und $\beta$ und mit der $z$ Axe beziehungsweise die Winkel $\gamma$ und $180 - \gamma$, der Winkel $\gamma$ ist also ebenfalls bestimmt. Dabei sind $\alpha$ und $\beta$ kei-

neswegs willkürlich, wie das vorige Beispiel beweist, sondern an die Bedingung

$$\alpha + \beta \geq 90^0$$

gebunden; denn wären $\alpha$ und $\beta$ beide kleiner als $45^0$, so würden sich die Kegelflächen nicht mehr durchdringen.

Aus dem Umstande, dass durch die Winkel $\alpha$ und $\beta$ der Winkel $\gamma$ schon mitbestimmt ist, ergibt sich, dass zwischen den drei Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eine Beziehung statthaben muss, welche gestattet den Winkel $\gamma$ zu berechnen, wenn die Winkel $\alpha$ und $\beta$ der obigen Bedingung gemäss gewählt sind, und zwar muss diese Relation zwei Werte für $\gamma$ liefern, die einander zu $180^0$ ergänzen.

Um diese Beziehungen zu erhalten, tragen wir auf einem durch den Coordinatenanfangspunkt im ersten Oktanten gezogenen Strahl die Einheit auf und fällen vom Endpunkte der Strecke das Perpendikel $p$ auf die $x$ Axe und ebenso das Perpendikel $p_1$ auf die $xy$ Ebene (Fig. 20). Dann ist die Entfernung des Fusspunktes des ersten Perpendikels vom Ursprunge $\cos\alpha$ und man hat:

$$p^2 + \cos^2\alpha = 1.$$

Nun ist aber $p$ auch die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $p_1$ und dessen andere Kathete die Entfernung $p_2$ der beiden Projectionspunkte ist. Man hat also auch:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2$$

Da aber, wie leicht aus der Figur abgelesen werden kann:

$$p_1 = \cos\gamma \quad p_2 = \cos\beta$$

ist, so folgt:

$$p^2 = \cos^2\gamma + \cos^2\beta$$

und folglich durch Einsetzen in die obige Formel:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Diese Relation gestattet nun den Winkel $\gamma$ zu berechnen, wenn $\alpha$ und $\beta$ gegeben sind. Man findet durch Auflösung nach $\gamma$:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Da $\cos\gamma$ notwendigerweise reell sein muss, so muss zwischen $\alpha$ und $\beta$ die Bedingung bestehen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \leqq 1 \text{ oder } \sin^2\alpha \geqq \cos^2\beta$$

was eintritt, wenn, wie weiter oben behauptet wurde, $\alpha + \beta \leqq 90^0$ ist.

Zum Beweise dieser Behauptung sei $\alpha = 45^0 - \varepsilon$ und $\beta = 45^0 + \varepsilon'$ und $\varepsilon' \geqq \varepsilon$ vorausgesetzt; dann ist:

$$\cos\alpha = \cos(45^0 - \varepsilon) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon)$$
$$\cos\beta = \cos(45^0 + \varepsilon') = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\cos\varepsilon' - \sin\varepsilon')$$

und somit:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \sin(\varepsilon' - \varepsilon)\cos(\varepsilon + \varepsilon')$$

Nun ist:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \alpha + \beta - 90^0 \quad \varepsilon' + \varepsilon = \beta - \alpha.$$

Wenn also $\alpha$ und $\beta$ so gewählt werden, dass neben obiger Bedingung noch die Bedingung $\beta - \alpha \leqq 90^0$ erfüllt ist, so ist das Produkt $\sin(\varepsilon' - \varepsilon)\cos(\varepsilon + \varepsilon')$ immer ein positiver echter Bruch und also die rechte Seite der vorstehenden Formel positiv.

Dem positiven Vorzeichen der Wurzel entspricht ein spitzer, dem negativen Vorzeichen dagegen ein stumpfer Winkel. Im ersteren Falle erstreckt sich der zu ziehende Strahl nach der Seite der positiven $z$ Axe, im letzteren Falle nach der negativen Seite dieser Axe.

Folgende Tabelle gibt den Oktanten an, in welchem der Strahl bei den bezüglichen Vorzeichen der Cosinuse der drei Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sich erstreckt:

| Oktant | $\cos\alpha$ | $\cos\beta$ | $\cos\gamma$ |
|---|---|---|---|
| I | + | + | + |
| IV | + | − | + |
| III | − | − | + |
| II | − | + | + |
| VI | + | + | − |
| V | + | − | − |
| VIII | − | − | − |
| VII | − | + | − |

Gewöhnlich ist es der Fall, dass die Vorzeichen von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ durch das Vorzeichen von $\cos\gamma$ mitbestimmt sind, so dass dieselben mit dem Wechsel des letzteren ebenfalls wechseln. Einem solchen Wechsel entspricht, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, der entgegengesetzte Richtungssinn des Strahles. Die beiden Vorzeichen der Wurzel für $\cos\gamma$ zeigen also den Sinn einer Geraden an.

## 17.

**Winkel einer Geraden mit den Coordinatenebenen.** Unter dem Winkel, welchen eine gegebene Gerade mit einer Coordinatenebene bildet, versteht man das positive oder negative Complement des Winkels, welchen ein durch den Coordinatenanfangspunkt mit der gegebenen Geraden parallel gezogener Strahl mit der auf der betreffenden Coordinatenebene senkrecht stehenden Axe bildet. Der Parallelstrahl ist immer oberhalb der $xy$ Ebene zu ziehen, wenn der Geraden ein bestimmter Sinn nicht beigelegt ist.

Sind $a$, $b$, $c$ die Winkel, welche eine Gerade beziehungsweise mit den Coordinatenebenen der $yz$, der $xz$ und der $xy$ bildet und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Gerade mit den Axen $x$, $y$ und $z$ einschliefst, dann lehrt folgende Tabelle die Beziehungen zwischen diesen Winkeln in den vier ersten Oktanten:

| Oktant | $c$ | $b$ | $a$ |
|---|---|---|---|
| I. | $90^0 - \gamma$ | $90^0 - \beta$ | $90^0 - \alpha$ |
| IV. | $90^0 - \gamma$ | $\beta - 90^0$ | $90^0 - \alpha$ |
| III. | $90^0 - \gamma$ | $\beta - 90^0$ | $\alpha - 90^0$ |
| II. | $90^0 - \gamma$ | $90^0 - \beta$ | $\alpha - 90^0$ |

Es ist also:

$$\cos c = \sin\gamma \quad \cos b = \sin\beta \quad \cos a = \sin\alpha.$$

## 18.

**Kugelcoordinaten.** Nennt man die Winkel, welche der Radiusvector $\varrho$ eines Punktes $P$ mit den Axen bildet, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, dann ergeben sich, wenn man noch die Strecke $\varrho$ auf die drei Coordinatenaxen projiciert, die Formeln:

$$x = \varrho \cos \alpha \quad y = \varrho \cos \beta \quad z = \varrho \cos \gamma.$$

$\varrho$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ heissen die Kugelcoordinaten des Punktes.

Bei Anwendung von Kugelcoordinaten erscheint also ein Punkt durch vier Zahlen bestimmt. Dieselben vertreten jedoch nur die Stelle von drei Zahlen, da $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nach (**16**) von einander abhängig sind.

Quadriert man die vorigen Gleichungen und addiert die quadrierten Gleichungen, so ergibt sich die Beziehung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

Die Construction eines Punktes im Kugelcoordinatensystem geschieht mittelst einer Kugel vom Radius $\varrho$ und einem Strahle, welcher mit den Axen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bildet. Der Durchschnittspunkt des Strahls mit der Kugel ist der gesuchte Punkt.

## 19.

**Polarcoordinaten eines Punktes.** Das Polarcoordinatensystem besteht aus einem festen Punkte, dem Pole, aus einem durch denselben gehenden festen Strahle, der Polaraxe, und aus einer durch die letztere gehende Ebene, welche Polarebene genannt wird. In der Fig. 14 ist die Polarebene senkrecht zur Ebene des Papiers zu denken. Demgemäss versteht man unter den Polarcoordinaten eines Punktes die Entfernung $\varrho$ desselben vom Pole, den Winkel $\varphi$, den der durch den Pol und den Punkt bestimmte Strahl mit der Polaraxe macht, und den Winkel $\psi$, welchen eine durch diesen Strahl und die Polaraxe gelegte Ebene mit der Polarebene bildet.

Im Polarcoordinatensystem wird also ein Punkt construiert durch eine Kugel vom Radius $\varrho$, deren Centrum der Pol ist, dann durch eine die Polaraxe enthaltende Ebene, welche mit der Polarebene den Winkel $\psi$ bildet, und endlich mittelst eines in dieser Construktionsebene enthaltenen Strahls, dessen Anfangspunkt der Pol ist und der mit der Polaraxe den Winkel $\varphi$ bildet. Die Ebene $\psi$ schneidet die Kugel vom Radius $\varrho$ in einem grössten Kreise, welch letzterer von dem Strahle $\varphi$ in dem gesuchten Punkte getroffen wird. Denkt man sich im Pole einen Beobachter auf der

Polarebene stehend, und in der Richtung der Polaraxe sehend, so ist der positive Sinn des Winkels $\psi$ übereinstimmend mit der Bewegung der Zeiger einer Uhr, deren Zifferblatt von dem Beobachter abgewendet ist. Statt die Constructionselemente in der Reihenfolge Kugel, Ebene, Gerade anzuwenden, kann man dieselben auch in der Reihenfolge Kugel, Gerade und Ebene gebrauchen. Alsdann erscheint, weil alle Geraden, die mit der Polaraxe den constanten Winkel $\varphi$ bilden, Erzeugende einer Kegelfläche sind, der Punkt construiert als Durchschnittspunkt der drei Flächen: Kugel, Kegel, Ebene. Der Kegel, dessen Spitze der Pol und dessen Axe die Polaraxe ist, schneidet aus der Kugel einen Kreis aus und die Ebene trifft diesen letzteren in zwei Punkten, von denen der eine dem Werte von $\psi$ gemäss zu wählen ist.

## 20.

**Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und Polarcoordinaten.** Aus Fig. 15 folgt sofort:

$$x = \varrho \cos\varphi \quad y = \varrho \sin\varphi \cos\psi \quad z = \varrho \sin\varphi \sin\psi$$

mittelst welcher Formeln die rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ durch die Polarcoordinaten $\varrho$, $\varphi$, $\psi$ unzweideutig ausgedrückt sind.

Umgekehrt hat man aber auch

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \cos\psi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

wie sich direkt aus der Figur oder durch Umkehrung der obigen Formeln ergibt.

Da $\varrho$ als der Radius einer Kugel immer positiv ist, so ist das Vorzeichen der Wurzelgrösse in vorstehenden Ausdrücken immer positiv zu nehmen.

## 21.

**Graphische Darstellung der Raumformen.** Da jede räumliche Figur aus Punkten, Geraden und Ebenen, sei es durch Aneinan-

derreihung dieser Elementarformen oder durch Bewegung einer derselben entsteht, so wird es sich bei der graphischen Darstellung der räumlichen Figuren darum handeln, wie diese Elementarformen zur Darstellung gelangen. Da nun aber eine Ebene und ebenso eine Gerade aus Punkten zusammengesetzt ist, und da ein Punkt nach (12) durch zwei von seinen Projectionen bestimmt ist, so wird auch jede der obigen Elementarformen durch zwei Projectionen bestimmt sein. Es können also durch die orthogonalen Parallelprojectionen auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen die Raumfiguren im allgemeinen graphisch bestimmt werden, indem man nur die Punkte, Geraden und Ebenen der Raumfigur auf jene Ebenen zu projicieren braucht. Insbesondere können dieselben nach gegebenen Massen eingetragen werden, wenn man auf der Schnittlinie der beiden Projectionsebenen einen festen Punkt $O$ annimmt. Es ist nämlich dann (Fig. 16) jeder Punkt $P$ durch seine rechtwinkligen Coordinaten

$$P P' = P'' P_0 = z; \quad P P'' = P' P_0 = y; \quad P P''' = O P_0 = x$$

bestimmt.

Die beiden Projectionsebenen werden zum Zwecke der Darstellung in **eine** Ebene, welche man als **Zeichnungsebene** benützt, gebracht. Zu diesem Zwecke dreht man die $xz$ Ebene um die $x$ Axe bis die $+z$ Axe mit der $-y$ Axe zusammenfällt. Die Punkte $P'$ und $P''$ kommen dann auf das die Axe $x$ im Punkte $P_0$ schneidende Perpendikel zu liegen. (Fig. 16b.)

Gewöhnlich denkt man sich die eine der Ebenen ($xy$) horizontal und die zweite ($xz$) vertical, und nennt demgemäss die erstere die Horizontaltafel und die letztere die Vertikaltafel des Projectionssystems und ihre Schnittlinie kurzweg Axe.

In manchen Fällen reichen zwei Ebenen zur graphischen Darstellung einer Raumform nicht aus, so dass die drei Projectionsebenen des Coordinatensystems benützt werden müssen. Zu diesem Zwecke dreht man zwei derselben (die $xz$ und die $yz$Ebene), bis sie mit der horizontal vorauszusetzenden $xy$ Ebene zusammenfallen. Die $xz$ Ebene wird wie oben um die $x$ Axe gedreht, so dass die $-z$ Axe mit der $+y$ Axe zusammenfällt, und die $yz$ Ebene um

die $y$ Axe, so dass die $-z$ Axe mit der $+x$ Axe zusammenfällt, wie Fig. 17 zeigt. In dieser Figur sind die drei Projectionen des Punktes $P$ verzeichnet für jeden Octanten und die betreffenden Coordinaten eingetragen. Dabei ist bei jeder Projection diejenige Coordinate weggelassen, welche aus einer andern Projection ersichtlich ist. Den ganzen so eben beschriebenen Prozess nennt man Umklappungsprozess.

## 22.

**Analytisches Gegenstück des Umklappungsprozesses.** Sehen wir nun zu, welche Veränderungen die Bezeichnungen der Coordinaten der Projectionen eines Punktes erleiden durch das Umklappen der Vertikalebene in die Horizontalebene. Die Vertikalebene war vor dem Umklappen die Ebene des Coordinatensystems der $xz$ und ist dies auch noch nach dem Umklappen. Es liegen also nach dem Umklappen zwei Coordinatensysteme aufeinander. Beide haben denselben Ursprung und dieselben Axen. Eine Axe hat in beiden Systemen denselben Namen und ist auch in demselben Sinne genommen. Die zweiten zusammenfallenden Axen führen jedoch verschiedene Namen, die eine heisst $y$, die andere $z$ Axe, und sind in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen beim Auftragen der Coordinaten. Daraus folgt, dass die $x$ Coordinaten der Punkte des einen Systems dem Werte und dem Vorzeichen nach übereinstimmen mit den $x$ Coordinaten des andern Systems und dass die $z$ Coordinate eines Punktes in dem einen Systeme dem absoluten Werte nach übereinstimmt mit der $y$ Coordinate des andern Systems, dagegen nicht dem Vorzeichen nach, und zwar gilt dies, einerlei in welchem Quadranten der Punkt liegen mag. In Figur 18 sind die Quadranten des Coordinatensystems der $xz$ mit arabischen und jene des Coordinatensystems der $xy$ mit römischen Ziffern bezeichnet. Man erkennt daraus, dass der erste Quadrant des einen Systems mit dem vierten des andern, und dass der zweite Quadrant des einen Systems mit dem dritten des andern zusammenfällt.

Nachstehende Tabelle gibt die Coordinaten eines und desselben Punktes für die vier Quadranten der beiden Systeme:

| System der $xy$ | | System der $xz$ | |
|---|---|---|---|
| Quadrant | Coordinate | Quadrant | Coordinate |
| I | $+x$, $+y$ | 4 | $+x$, $-z$ |
| II | $-x$, $+y$ | 3 | $-x$, $-z$ |
| III | $-x$, $-y$ | 2 | $-x$, $+z$ |
| IV | $+x$, $-y$ | 1 | $+x$, $+z$ |

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Coordinaten eines und desselben Punktes in den beiden Coordinatensystemen der $xy$ und der $xz$ werden, wenn letztere durch den Prozess des Umklappens aufeinander zu liegen kommen, durch die Transformationen $z = -y$ oder $y = -z$ ineinander übergeführt. Die $x$ Coordinate ist in beiden Systemen dieselbe.

Durch Umlegung auch der $yz$ Ebene in der oben angegebenen Weise, fallen drei Coordinatensysteme der Lage nach zusammen in eine Ebene. Die Coordinaten eines und desselben Punktes dieser Ebene werden also verschieden zu bezeichnen sein, je nachdem man den Punkt in Bezug auf das erste, das zweite oder das dritte der drei Coordinatensysteme bestimmen will.

Folgende Tabelle gibt nun die Coordinaten des Punktes für die drei Fälle an, dem Werte und dem Vorzeichen nach.

| Coordinatensystem | | |
|---|---|---|
| der $xy$ | der $xz$ | der $yz$ |
| $+x$, $+y$ | $+x$, $-z$ | $-z$, $+y$ |
| $+x$, $-y$ | $+x$, $+z$ | $-z$, $-y$ |
| $-x$, $-y$ | $-x$, $+z$ | $+z$, $-y$ |
| $-x$, $+y$ | $-x$, $-z$ | $+z$, $+y$ |

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass die Coordinaten des Systems $yz$ in die des Systems $xy$ übergeführt werden durch die Transformationen $y = y$, $z = -x$.

Wenn man also die drei Projectionen eines Punktes mit Hilfe ihrer Coordinaten verzeichnen will, so genügt es ein einziges Coordinatensystem, z. B. das der $xy$, zu grunde zu legen. Man hat dann

nur nötig die $z$ Coordinaten des Projectionspunktes auf der $xz$ Ebene mit $-y$, und die $z$ Coordinate des Projectionspunktes auf der $yz$ Ebene mit $-x$ zu bezeichnen.

Soll z. B. der Punkt $(a, -b, -c)$, dessen Projectionen die Coordinaten haben:

$$P'' \begin{cases} x = a \\ z = -c \end{cases} \qquad P''' \begin{cases} y = -b \\ z = -c \end{cases} \qquad P' \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases}$$

verzeichnet werden, so hat man in der $xy$ Ebene die drei Punkte zu construieren:

$$P'' \begin{cases} x = +a \\ y = +c \end{cases} \qquad P''' \begin{cases} y = -b \\ x = +c \end{cases} \qquad P' \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases}$$

## 23.

**Graphische Darstellung der Raumpunkte im Polarcoordinatensystem.** Die graphische Darstellung eines durch seine Polarcoordinaten $\psi$, $\varphi$, $\varrho$ gegebenen Raumpunktes kann auf doppelte Weise geschehen.

Das eine Verfahren ist folgendes:

Man lege (Fig. 18[a]) eine Ebene, die Bildebene, senkrecht zur Polaraxe in einem beliebigen Abstande $d$ vom Pole $C$. Der Schnittpunkt $C'$ der Bildebene mit der Polaraxe heifst Hauptpunkt. Der Kreis in der Bildebene, dessen Mittelpunkt der Hauptpunkt und dessen Radius der Distanz $d$ des letzteren vom Pole gleich ist, heifst Distanzkreis. Die Schnittlinie $C'D$ der Bildebene mit der Polarebene wird Bildaxe genannt.

Soll also jetzt der Punkt $P$ mit den Coordinaten $\psi$, $\varphi$, $\varrho$ construiert werden, so vergegenwärtige man sich zunächst, dafs die Construktionsebene $\psi$ die Bildebene in einer Geraden durchsetzt, welche durch den Hauptpunkt $C'$ geht und mit der Bildaxe den Winkel $\psi$ bildet. Zieht man also in der Bildebene diese Gerade, welche Spur der Ebene $\psi$, oder kurzweg, Spur $\psi$ genannt werden soll, so ist damit $\psi$ construiert. — Der Kegel mit der Öffnung $2\varphi$ schneidet die Bildebene in einem Kreise und dieser die Spur $\psi$ in zwei Punkten. Der eine davon, er werde mit $P'$ bezeichnet, ist das Bild des Raumpunktes $P$, vom Pole aus gesehen, oder er

ist die Projection des Punktes $P$ auf die Bildebene vom Pole aus. Der Strahl $CP$ heifst desshalb auch projicierender Strahl. Der letztere bildet mit der Polaraxe den Winkel $\varphi$ und auf ihm liegt in der Entfernung $\varrho$ vom Pole der Punkt $P$. Das Dreieck, welches von der Spur $\psi$, der Polaraxe und dem projicierenden Strahl gebildet wird, werde projicierendes Dreieck genannt. Durch Umlegung desselben in die Bildebene um die Spur $\psi$ erscheinen auf letzterer $\varphi$ und $\varrho$ in wahrer Grösse. Zieht man also zur Spur $\psi$ im Hauptpunkt $C'$ den senkrechten Durchmesser und trägt an dem einen Endpunkte $\mathfrak{C}$ des letzteren den Winkel $\varphi$ an, und auf dem anzulegenden Winkelschenkel die Strecke $\varrho$ ab, so sind $\varphi$ und $\varrho$ construiert. Durch den Endpunkt $\mathfrak{P}$ von $\varrho$ und durch den Bildpunkt $P'$ ist der Punkt $P$ vollständig bestimmt. Denn dreht man das Dreieck $\mathfrak{C}C'P'$ um die Spur $\psi$ in seine natürliche Lage zurück, so kommt durch diese Drehung $\mathfrak{P}$ in die Lage von $P$.

Fällt man vom Punkte $\mathfrak{P}$ die Lote $\mathfrak{P}F$ und $\mathfrak{P}E$ auf $C'\mathfrak{C}$ und $C'P'$, errichtet im Fufspunkte $E$ des letzteren Lotes ein Perpendikel auf die Bildebene und trägt auf diesem $C'F = d - x$ auf, so ist der Endpunkt dieser Strecke ebenfalls $P$; denn wie ein Blick auf die Figur zeigt, sind

$$\mathfrak{C}F = x \quad EG = z \quad GC' = y$$

die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $P$.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dafs zu jedem Punkte $P'$ in der Bildebene unendlich viele Raumpunkte gehören, die alle auf dem projicierenden Strahle $CP'$ liegen. Sollen also zwei Punkte $P'$ und $\mathfrak{P}$ einen Punkt im Raume bestimmen, so mufs $\mathfrak{P}$ auf dem umgelegten projicierenden Strahle von $P'$ liegen.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $P'$ mit $x'$, $y'$, $z'$, die von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, dann hat man, wie aus der Figur leicht zu entnehmen:

$$y' = d \operatorname{tg} \varphi \cos \psi \quad \mathfrak{y} = \varrho \sin (\varphi + \psi) - d \sin \psi$$
$$z' = d \operatorname{tg} \varphi \sin \psi \quad \mathfrak{z} = \varrho \cos (\varphi + \psi) + d \cos \psi$$

Es können also auch mit Hilfe dieser Coordinatenausdrücke die Punkte $P'$ und $\mathfrak{P}$ in der Bildebene verzeichnet werden.

Man gibt vorstehenden Formeln ohne Mühe die Gestalt:

$$y' = \frac{d\,\varrho \sin\varphi \cos\psi}{\varrho \cos\varphi} = d\,\frac{y}{x}$$

$$z' = \frac{d\,\varrho \sin\varphi \sin\psi}{\varrho \cos\varphi} = d\,\frac{z}{x}$$

und

$$\mathfrak{y} = y - (d - x) \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

$$\mathfrak{z} = z + (d - x) \cdot \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

Wenn also die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$ für ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben sind, dessen Ursprung mit dem Pole, dessen $x$ Axe mit der Polaraxe, dessen $xy$ Ebene mit der Polarebene zusammenfällt und dessen $yz$ Ebene der Bildebene parallel ist, so können in letzterer $P'$ und $\mathfrak{P}$ construiert werden mit Hilfe vorstehender Formeln.

Das zweite Verfahren, einen Punkt, dessen Polarcoordinaten gegeben sind, zu zeichnen, ist dem vorigen im ersten Teile analog und unterscheidet sich nur darin, dafs das projicierende Dreieck zuerst auf die Polarebene und dann mit dieser um die Bildaxe in die Bildebene umgeklappt wird. Nimmt man also jetzt die Polarebene (Fig. 18[a]) als Zeichenebene, so hat man vom Pole $C$ aus unter dem Winkel $\varphi$ gegen die Polaraxe einen Strahl $CD$ zu ziehen, die Bildebene in die Zeichenebene umzuklappen, und in ihr durch den Hauptpunkt eine Gerade mit dem Neigungswinkel $\psi$ gegen die Bildaxe zu ziehen. Der Kreis mit dem Radius $C'D$, in der Bildebene gezeichnet, schneidet dann auf der Geraden den Bildpunkt $P'$ aus. Der Punkt $\mathfrak{P}_1$ in der Entfernung $\varrho$ von $C$ auf $CD$ ist der zweite Punkt, der erforderlich ist, damit der Raumpunkt $P$ vollständig bestimmt sei. Um letzteren aus $P'$ und $\mathfrak{P}_1$ zu construieren, dreht man die Bildebene um ihre Axe bis sie senkrecht ist zur Zeichenebene und hierauf das Dreieck $CC'D$ um die Polaraxe um den Winkel $\psi$. Der Punkt $\mathfrak{P}_1$ nimmt dann nach der Umdrehung die Lage von $P$ an.

Auch diese Darstellung gestattet die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $P$ aus der Figur abzugreifen. Fällt man nämlich

von $\mathfrak{P}_1$ die Lote $\mathfrak{P}_1F_1$ und $\mathfrak{P}_1E_1$ auf die Polaraxe und Bildaxe. ferner von $E_1$ das Lot auf die Gerade $C'P'$, dann ist:

$$CF_1 = x \quad C'G_1 = y \quad E_1G_1 = z.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}_1$ sind:

$$\mathfrak{x} = x$$

$$\mathfrak{y} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

und diejenigen des Punktes $P'$:

$$y' = d \operatorname{tg} \varphi \cos \psi = d \frac{y}{x}$$

$$x' = d + z' = d + d \operatorname{tg} \varphi \sin \psi = d \frac{z}{x} + d$$

Wenn also der Punkt $P$ durch seine rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ gegeben ist, so können die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte $P'$ und $\mathfrak{P}_1$ nach vorstehenden Formeln berechnet und die Punkte selbst diesen Werten entsprechend gezeichnet werden.

## 24.

**Interpretation der einfachsten Gleichungen.** Nach (11) ist für alle Punkte der $yz$ Ebene die $x$ Coordinate der Null gleich. Die Gleichung:

$$x = o$$

drückt daher diese gemeinsame Eigenschaft der Punkte der $yz$ Ebene aus, wenn man dieselben durch rechtwinklige Coordinaten bestimmt denkt. Man nennt sie desshalb die Gleichung dieser Ebene. Aus denselben Gründen sind:

$$y = o \text{ und } z = o$$

die Gleichungen der $xz$, beziehungsweise der $xy$ Ebene.

Die Gleichung

$$x = a$$

verlangt die Construction eines Punktes, dessen $x$ Coordinate den Wert $a$ hat, wo unter $a$ ein spezieller Zahlenwert zu verstehen ist. Solcher Punkte gibt es aber unendlich viele. Sie liegen alle

in einer zur $yz$ Ebene parallelen Ebene mit dem Abstande $a$. Man nennt $x = a$ die Gleichung dieser Ebene, weil sie alles enthält, was den Punkten der letzteren gemeinsam ist.

Ebenso sind:

$$y = b \text{ und } z = c$$

die Gleichungen zweier Ebenen, die beziehungsweise von den Coordinatenebenen der $xz$ und $xy$ die Abstände $b$ und $c$ haben. Alles dies folgt schon aus dem oben aufgestellten Coordinatenbegriff, nach welchem die drei Zahlen $x$, $y$, $z$ ebensowohl Perpendikel als Ebenen vorstellen können.

Die Gleichung

$$x^2 = a$$

verlangt die Construktion aller Punkte, für welche das Quadrat der $x$ Coordinate den Wert $a$ hat. Dieselben liegen also auf zwei Ebenen, deren Abstände von der $yz$ Ebene beziehungsweise $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ sind. Es stellt somit die obige Gleichung ein zur $yz$ Ebene paralleles Ebenenpaar dar, welches zur $yz$ Ebene symmetrisch liegt. In der That zerfällt die Gleichung in die beiden folgenden:

$$x + \sqrt{a} = o \qquad x - \sqrt{a} = o$$

wovon jede eine der genannten Ebenen darstellt.

Die Gleichung

$$x = y$$

bedeutet, dass man alle Punkte des Raumes aufsuchen soll, für welche die $x$ Coordinate dem Werte und dem Vorzeichen nach gleich der $y$ Coordinate ist. Da man aber mit den Zeichen $x$ und $y$ nicht nur die Vorstellung von Perpendikeln, welche parallel der $x$, beziehungsweise der $y$ Axe gemessen sind, sondern auch die Vorstellung von Ebenen, welche senkrecht zu diesen Axen in den Abständen $x$ und $y$ vom Coordinatenanfang gelegt sind, verbinden kann, so bedeutet die vorstehende Gleichung auch, dass man zwei zur $yz$ und $xz$ parallele Ebenen construieren soll, welche auf der $x$ Axe, beziehungsweise $y$ Axe, Stücke abschneiden, die einander gleich sind, und dass man die den beiden Ebenen ge-

meinschaftlichen Punkte aufsuchen soll. Solcher Ebenen gibt es aber zweifach unendlich viele. Dieselben schneiden sich paarweise auf geraden Linien, die zusammen eine Ebene bilden, welche durch die $z$ Axe hindurch geht und den Winkel, der von den anliegenden Coordinatenebenen gebildet wird, halbiert. Für alle Punkte dieser Ebene ist also $x = y$ und deshalb sagen wir, es sei dies die Gleichung der Halbierungsebene des Flächenwinkels $x\,o\,y$ (Fig. 21).

Die Gleichungen

$$x = z \quad z = y$$

sind aus gleichen Gründen die analytischen Repräsentanten der Halbierungsebenen der Flächenwinkel *yoz* und *zox*.

Die Gleichungen

$$x = -y \quad y = -z \quad z = -x$$

stellen die Halbierungsebenen der drei übrigen Flächenwinkel dar.

Die sechs Gleichungen

$$x - y = o \quad y - z = o \quad z - x = o$$
$$x + y = o \quad y + z = o \quad z + x = o$$

sind also die Gleichungen der sechs Halbierungsebenen der Flächenwinkel des Coordinatensystems.

Die drei Halbierungsebenen

$$x - y = o \quad y - z = o \quad z - x = o$$

schneiden sich in ein und derselben Geraden. Für die Punkte dieser Geraden gelten also die drei Gleichungen gleichzeitig. Es ist also für jene Punkte

$$x = y = z$$

und somit liegen alle Punkte

$$(a,\ a,\ a)$$

auf einer Geraden, welche von $o$ ausgeht und mit den Axen und Ebenen des Coordinatensystems gleiche Winkel bildet.

Die Gleichungen

$$x - y = o \quad y - z = o$$

sind die Gleichungen dieser Halbierungslinie.

Ebenso sind

$$x = -y = z; \quad x = y = -z; \quad -x = y = z$$

die Gleichungen der drei übrigen Halbierungsgeraden des Coordinatensystems.

## Übungsaufgaben.

1. In welchem Oktanten liegen die Punkte $(+5, +9, +3)$, $(-5, -10, +4)$, $(-7, +8, +3)$, $(-3, +9, -6)$, $(+11, -6, -9)$, $(+13, -21, +8)$, $(+7, +30, -16)$, $(-11, -50, -3)$?

2. Die Winkel, welche eine Gerade mit den Coordinatenaxen der $x$ und $y$ bildet, seien

| 1) | 2) | 3) | 4) |
|---|---|---|---|
| $\alpha = 30^0\ 45'$ | $\alpha = 40^0\ 19'$ | $\alpha = 120^0\ 16'$ | $\alpha = 125^0\ 16'$ |
| $\beta = 70^0\ 20'$ | $\beta = 110^0\ 36'$ | $\beta = 75^0\ 29'$ | $\beta = 110^0\ 20'$ |

Man berechne den Winkel $\gamma$, den dieselbe mit der $z$ Axe einschliefst, wenn der im Sinne der Geraden durch den Ursprung gezogene Parallelstrahl oberhalb der $xy$ Ebene, dann unterhalb der $xy$ Ebene verläuft.

3. Welche Winkel bilden die Geraden der vorigen Aufgabe mit den Coordinatenebenen?

4. Wenn man um den Ursprung eine Kugel mit dem Radius 1 beschreibt, dann schneidet jede Coordinatenebene die Kugel in einem gröfsten Kreise. In der so entstehenden Figur seien die Geraden der Aufgabe 2) schematisch einzutragen, wie Fig. 22 zeigt.

5. Welches sind die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, dessen Kugelcoordinaten die Werte haben;

| 1) | 2) | 3) | 4) |
|---|---|---|---|
| $\varrho = 20$ | $\varrho = 50$ | $\varrho = 45$ | $\varrho = 80$ |
| $\alpha = 60^0\ 20'$ | $\alpha = 40^0\ 30'$ | $\alpha = 160^0\ 40'$ | $\alpha = 95^0\ 40'$ |
| $\beta = 50^0\ 40'$ | $\beta = 100^0\ 15'$ | $\beta = 73^0\ 20'$ | $\beta = 130^0\ 50'$ |

6. Die Polarcoordinaten eines Punktes seien

| 1) | 2) | 3) |
|---|---|---|
| $\varrho = 100$ | $\varrho = 40$ | $\varrho = 70$ |
| $\varphi = 70^0\ 43'$ | $\varphi = 100^0\ 20'$ | $\varphi = 40^0\ 42'$ |
| $\psi = 80^0\ 20'$ | $\psi = 120^0\ 46'$ | $\psi = 290^0\ 18'$ |

Man bestimme seine rechtwinkligen Coordinaten und verzeichne denselben.

7. Welches sind die Polarcoordinaten der in der ersten Aufgabe angeführten Punkte?

8. Man verzeichne die in der ersten Aufgabe aufgeführten Punkte und zwar in dem Orthogonalsystem und im Polarsystem.

# III. Der Punkt.

## 25.

**Entfernung eines Punktes vom Ursprunge, ausgedrückt durch seine Coordinaten.** Die projicierenden Ebenen eines Punktes $(x_1\ y_1\ z_1)$ bestimmen mit den drei Coordinatenebenen ein Parallelpiped, dessen Kanten den Coordinaten des Punktes gleich sind. Die Diagonalen dieser Seitenflächen sind also Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken, deren Katheten die Länge dieser Coordinaten haben. Bezeichnet man daher die Diagonalen der Seitenflächen des Parallelpipeds, welche in den Coordinatenebenen liegen, beziehungsweise mit $l'$, $l''$, $l'''$, so ist

$$l' = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};\quad l'' = \sqrt{y_1^2 + z_1^2};\quad l''' = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$$

und wenn die Länge der Diagonale des Parallelpipeds mit $l$ bezeichnet wird, so hat man:

$$l^2 = l'^2 + z_1^2 = l''^2 + x_1^2 = l'''^2 + y_1^2 = \\ = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

woraus folgt:

$$l = \pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \text{ und } l = \sqrt{\frac{l'^2 + l''^2 + l'''^2}{2}} \quad . \quad (1)$$

als die gesuchte Entfernung des Punktes $x$, $y$, $z$ vom Coordinatenanfangspunkt. Bezeichnet man die Winkel, welche die Richtung der Strecke $l$ mit den Coordinatenaxen bildet, mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und die Winkel, welche $l'$, $l''$, $l'''$ mit $l$ bilden, durch $c$, $b$, $a$, so ergibt sich weiter:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{l} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{l} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{l}$$

$$\cos c = \frac{l'}{l} \qquad \cos b = \frac{l''}{l} \qquad \cos a = \frac{l'''}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ferner:

$$\sin c = \frac{z_1}{l} \qquad \sin b = \frac{y_1}{l} \qquad \sin a = \frac{x_1}{l}$$

Quadriert und addiert man die in den letzten zwei Reihen stehenden Gleichungen, so ergibt sich

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2$$

und:

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1.$$

Quadriert und addiert man dagegen die drei ersten Gleichungen, so erhält man die bereits unter (**16**) aufgestellte Grundformel:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

An den Ausdrücken für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ findet man nun die Richtigkeit der in (**16**) festgestellten Tabelle neuerdings bestätigt. Es ergeben sich nämlich für diese drei trigonometrischen Funktionen, je nach Lage des Punktes $x$, $y$, $z$, folgende Vorzeichen:

| Oktant. | $x$ | $y$ | $z$ | $\cos\alpha$ | $\cos\beta$ | $\cos\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | + | + | + | + | + | + |
| IV | + | — | + | + | — | + |
| III | — | — | + | — | — | + |
| II | — | + | + | — | + | + |
| VIII | — | — | — | — | — | — |
| VII | — | + | — | — | + | — |
| VI | + | + | — | + | + | — |
| V | + | — | — | + | — | — |

Das Vorzeichen von

$$l = \pm \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

bezieht sich immer nur auf den Sinn, in welchem die Strecke zu nehmen ist, aber nicht auf die Länge, wie schon in (**9**) dargelegt wurde. Nimmt man das obere Vorzeichen (+) der Wurzel, so will man damit nach (**15**) andeuten, dass der im Sinne der Strecke vom Coordinatenanfang aus gezogene Strahl oberhalb der $xy$ Ebene verlaufe, während das untere Vorzeichen (—) sich auf die untere Seite der $xy$ Ebene bezieht. Ist der Strecke ein bestimmter Sinn nicht beigelegt, so darf weder das eine noch das andere Vorzeichen genommen werden; es ist dann die Quadratwurzel vielmehr als reine Zahl zu behandeln. Das Gleiche ist zu beachten bei den Quadratwurzelausdrücken für $l'$, $l''$, $l'''$.

Die umgekehrte Aufgabe, die Coordinaten eines Punktes zu bestimmen, dessen Entfernung $\varrho$ vom Coordinatenanfange oberhalb oder unterhalb der $xy$ Ebene verläuft und mit der $x$ Axe den Winkel $\alpha$, mit der $y$ Axe den Winkel $\beta$ bildet, ist nun leicht zu lösen. Zunächst ist $\gamma$ zu berechnen aus:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

Es haben also $\alpha$ und $\beta$ den in (**16**) aufgestellten Bedingungen zu genügen. Geschieht dies, so liefern die Formeln ($2^a$) die Coordinaten:

$$x_1 = \varrho\cos\alpha \qquad y_1 = \varrho\cos\beta \qquad z_1 = \varrho\cos\gamma$$

wodurch der Punkt unzweideutig bestimmt ist, wenn über das Vorzeichen von $\cos\gamma$ vorher Bestimmung getroffen wurde. Die Vorzeichen der Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ sind also in $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ enthalten.

Liegt die Aufgabe zur Lösung vor, man soll die Coordinaten eines Punktes bestimmen, dessen Entfernung vom Coordinatenanfangspunkte die Projectionen $l'$, $l''$ und $l'''$ hat, so berechnet man zunächst nach der Formel:

$$l = \sqrt{\tfrac{1}{2}(l'^2 + l''^2 + l'''^2)}$$

seine Entfernung vom Ursprunge; die ($2^b$) liefern dann nach (**17**):

$$\sin\alpha = \frac{l'''}{l} \qquad \sin\beta = \frac{l''}{l} \qquad \sin\gamma = \frac{l'}{l}$$

Es ist also

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{l^2 - l'''^2}}{l}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{l^2 - l''^2}}{l}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{l^2 - l'^2}}{l}$$

und folglich nach Formel ($2^a$):

$$x = \pm\sqrt{l^2 - l'''^2}$$

$$y = \pm\sqrt{l^2 - l''^2}$$

$$z = \pm\sqrt{l^2 - l'^2}$$

Es gibt demnach acht solcher Punkte, die sich symmetrisch auf die acht Oktanten verteilen. Ihre Coordinaten werden aus vorstehenden Ausdrücken durch Combination der Vorzeichen erhalten.

Um die Winkel zu finden, welche die Projectionen $l'$, $l''$, $l'''$ mit den Axen bilden, führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\sphericalangle (l'\, x) = \varphi \quad \sphericalangle (l''\, z) = \psi \quad \sphericalangle (l'''\, y) = \chi$$

dann ist

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{l'} \qquad \cos\psi = \frac{z_1}{l''} \qquad \cos\chi = \frac{y_1}{l'''}$$

oder nach $(2^a)$:

$$\cos\varphi = \frac{l\cos\alpha}{l'} \qquad \cos\psi = \frac{l\cos\gamma}{l''} \qquad \cos\chi = \frac{l\cos\beta}{l'''}$$

und also nach $(2^b)$:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos c} \qquad \cos\psi = \frac{\cos\gamma}{\cos b} \qquad \cos\chi = \frac{\cos\beta}{\cos a}$$

oder auch:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \qquad \cos\psi = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \qquad \cos\chi = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Es ist also wenn man (3) anwendet:

$$\cos^2\varphi \,.\, \sin^2\gamma + \cos^2\psi \,.\, \sin^2\beta + \cos^2\chi \,.\, \sin^2\alpha = 1.$$

Multipliciert man die Gleichungen (1) miteinander, so ergibt sich

$$\cos\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\chi = ctg\ \alpha \,.\, ctg\ \beta \,.\, ctg\ \gamma.$$

Die graphische Darstellung des Punktes ist bereits unter (**21**) gegeben worden. Es erübrigt daher nur noch zu zeigen, wie durch Zeichnung die Entfernung eines Punktes vom Coordinatenanfangspunkt und die Winkel, welche der in ihrer Richtung gezogene Strahl mit den Coordinatenaxen einschliefst, bestimmt werden.

Die Formeln (1) lehren, dass die Entfernung $l$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten entweder $l'$ und $z_1$, oder $l''$ und $y_1$, oder $l'''$ und $x_1$ sind. Darnach ist es leicht, die Entfernung $l$ zu construieren. Mit Hilfe der Formeln (2) kann man dann auch aus der Figur 23 die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $a$, $b$, $c$ aufsuchen. Die Figur selbst wird hergestellt, indem man

den Punkt $x_1$, $y_1$, $z_1$ nach (**21**) verzeichnet und seine drei Projectionen mit dem Ursprunge $O$ verbindet. Dadurch erhält man die drei Projectionen der Strecke $l$. Letztere selbst ist dreimal, dem angegebenen Verfahren entsprechend, eingetragen. $l'$, $l''$ wurden zu diesem Zwecke auf der $x$ und $l'''$ auf der $y$ Axe abgetragen.

Nach diesem lässt sich leicht an der Hand derselben Figur die umgekehrte Aufgabe lösen, eine durch den Ursprung gehende Gerade zu verzeichnen, welche mit den Axen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bildet. Man zeichnet nämlich drei Strahlen (in der Richtung der $l$) vom Anfangspunkt $O$ aus, welche beziehungsweise mit der $x$ Axe den Winkel $\alpha$, mit der $y$ Axe den Winkel $\beta$ und mit der $z$ Axe den Winkel $\gamma$ bilden. — Hierauf beschreibt man einen Kreis mit beliebigem Radius ($l$) und zieht durch die Schnittpunkte des Kreises mit jenen drei Strahlen parallele Gerade mit den Axen. Diese Parallelen schneiden sich dann in Punkten, welche man nur mit dem Punkte $O$ zu verbinden braucht, um die Projectionen der gesuchten Geraden zu erhalten.

Die in (**16**) enthaltene Tabelle gibt Aufschluſs darüber, wie man die Winkel aufzutragen hat.

## 26.

**Entfernung zweier Punkte als Function ihrer Coordinaten. Richtung der Verbindungsgeraden.** Man lege durch jeden der beiden Punkte, deren Coordinaten beziehungsweise $x_1$, $y_1$, $z_1$ und $x_2$, $y_2$, $z_2$ seien, drei Ebenen parallel den Coordinatenebenen. Dieselben bilden dann ein Parallelpiped von den Kanten $z_2 - z_1$, $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, dessen eine Diagonale gleich der Entfernung $l$ der Punkte ist. Die Diagonalen der Seitenflächen des Parallelpipeds sind gleich den Längen der Projectionen $l'$, $l''$, $l'''$ der Strecke $l$ auf die drei Coordinatenebenen. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche letztere mit den Axen bildet, dann hat man unter Anwendung von (**7**) (Fig.) 24:

$$l\cos\beta = y_2 - y_1 \qquad l\cos\gamma = z_2 - z_1 \qquad l\cos\alpha = x_2 - x_1 \quad (1)$$

woraus unter Berücksichtigung von (**25**.3) durch Quadrieren und Wurzelausziehen folgt:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Strecke $l$ mit ihren Projectionen bildet, beziehungsweise mit $c$, $b$, $a$, so ist weiter:

$$\begin{aligned} l' &= l\cos c = l\sin\gamma \\ l'' &= l\cos b = l\sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ l''' &= l\cos a = l\sin\alpha \end{aligned}$$

Aus der Figur des Parallelepipeds aber ergibt sich:

$$\begin{aligned} l' &= \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} \\ l'' &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \\ l''' &= \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{aligned}$$

Man erhält also aus (1) unter Berücksichtigung von (2):

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

und aus (3) mit Berücksichtigung von (4):

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

Die Quadratwurzeln sind in allen vorstehenden Formeln als reine Zahlen zu nehmen, insbesondere ist dies bei dem Wurzelausdruck (2) zu beachten. Die Formeln (5) liefern demnach die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unzweideutig, während die (6) aufserdem noch die Lösungen $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$ zulassen. Dabei ist noch Folgendes zu beachten:

Nach der in (16) gemachten Festsetzung hat man behufs Construction der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einen Strahl oberhalb der $xy$ Ebene parallel mit der Verbindungsgeraden der Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ zu ziehen. Es muss also $\cos\gamma$ notwendig positiv sein. Sollte daher in

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

$z_2 - z_1 < o$ sein, so müfsten die Formeln (1) so geschrieben werden:

$$l\cos\alpha = x_1 - x_2 \qquad l\cos\beta = y_1 - y_2 \qquad l\cos\gamma = z_1 - z_2$$

wenn dieselben die richtigen numerischen Werte für die Cosinuse der Winkel liefern sollen.

Denkt man sich die Strecke in einem bestimmten Sinne durchlaufen, dann sind auch ihre Projectionen in diesem Sinne zu nehmen und darnach ergibt sich dann von selbst, wie man die Differenzen der Coordinaten zu bilden hat in den Zählern der Brüche für die Cosinuse der Winkel; $l$ ist aber immer als reine Zahl zu behandeln. Nach (8) sind nämlich die Projectionen in demselben Sinne zu nehmen, wie die Originalstrecke. Wir wollen nun ein für allemal uns merken, dafs den positiven Differenzen

$$x_2 - x_1 \qquad y_2 - y_1 \qquad z_2 - z_1$$

der positive Sinn der Projectionen entspricht. Der letztere ist also entgegengesetzt dem Sinne, in welchem in diesen Differenzen die Indices der Coordinaten aufeinanderfolgen, so dafs also jetzt für den Sinn $\overline{12}$ der Strecke vorstehende Differenzen die Projectionen angeben, während dem Sinne $21$ die entgegengesetzten Werte

$$x_1 - x_2 \qquad y_1 - y_2 \qquad z_1 - z_2$$

entsprechen.

Die (1) lassen sich auch noch schreiben:

$$x_2 = x_1 + l\cos\alpha \qquad y_2 = y_1 + l\cos\beta \qquad z_2 = z_1 + l\cos\gamma$$

Darnach ist einleuchtend, dass für irgend einen andern Punkt $(x, y, z)$ der Verbindungsgeraden, dessen Entfernung vom Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ mit $\varrho$ bezeichnet werden mag, ist:

$$x = x_1 + \varrho\cos\alpha \qquad y = y_1 + \varrho\cos\beta \qquad z = z_1 + \varrho\cos\gamma \qquad (7)$$

so dass also diese Gleichungen alle Punkte der Geraden darstellen, welche durch den festen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ geht und mit den Axen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ macht, vorausgesetzt, dass $\varrho$ jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Man findet aus obigen Formeln mit leichter Mühe:

$$l = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(l'^2 + l''^2 + l'''^2)}$$

und

$$l^2 = l'^2 + (z_1 - z_2)^2 = l''^2 + (y_1 - y_2)^2 = l'''^2 + (x_1 - x_2)^2 \quad (8)$$

Die graphische Lösung der Aufgabe, die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, ergibt sich an der Hand der aufgestellten Formeln leicht aus Figur 25, die ohne weitere Erklärung verständlich ist.

Aufserdem gibt es noch folgenden Weg, die wahre Grösse einer Strecke zu bestimmen.

Errichtet man nämlich (Fig. 26) in den Endpunkten einer der Projectionen, z. B. $l'$, die Perpendikel zu derselben und trägt auf denselben $z_1$ beziehungsweise $z_2$ auf, so ist die Strecke, welche die Endpunkte $p_1$ und $p_2$ der Perpendikel verbindet, gleich $l$.

Es hat nun keine Schwierigkeiten, die Coordinaten der Punkte $p_1$ und $p_2$ zu bestimmen. Dieselben seien $x'$ $y'$ und $x''$ $y''$; dann ist:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + z_1 \sin\varphi \qquad x'' = x_2 + z_2 \sin\varphi \\ y' &= y_1 + z_1 \cos\varphi \qquad y'' = y_2 + z_2 \cos\varphi \end{aligned} \quad \ldots \quad (9)$$

wo $\varphi$ der Winkel ist, den die Projection $l'$ mit der $x$ Axe bildet; also

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

## 27.

**Affine Strecken.** Die Strecken $l'$, $l''$, $l'''$, $l$ stehen nach (**26.3**) zu einander in constantem Verhältnis. Es ist nämlich:

$$l : l' : l'' : l''' = 1 : \cos c : \cos b : \cos a.$$

Die Punkte der Strecken $l'$, $l''$, $l'''$ sind die orthogonalen Projectionen der Punkte der Strecke $l$ und folglich affin zu einander und zu letzteren. Die Strecken nennt man deshalb affine Strecken.

Die orthogonalen Projectionen einer Strecke $l$ sind zu derselben und unter sich affin.

Durch den Prozess des Umklappens ergibt sich, dass die entsprechenden Punkte affiner Strecken in Geraden liegen, welche senkrecht zur Axe sind oder

die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte affiner Strecken sind parallel zu einander.

Die Verlängerungen von zwei affinen Strecken schneiden sich in einem Punkte $\pi$ (Fig. 27), welcher Affinitätspunkt heisst. Es ist der Punkt, welcher auf den verlängerten Strecken sich selbst entspricht. Die Verwandtschaft wird in ihm zur Identität und deshalb kann man ihn auch Identitätspunkt nennen.

Mit Hilfe des Affinitätspunktes $\pi$ ist man im Stande, die zweite Projection einer Strecke zu construieren, wenn ein Punkt $P$ in ihr oder auf ihrer Verlängerung und die erste Projection gegeben sind. Die durch die Endpunkte der ersteren Strecke auf die Axen gezogene Senkrechten schneiden nämlich auf der Verbindungsgeraden der Punkte $\pi$ und $P$ ein Segment aus, welches gleich der zweiten Projection ist.

Ebenso kann die dritte Projection aus der ersteren mittelst des Affinitätspunktes $\pi'$ und eines beliebigen gegebenen Punktes $\pi$ in ihr gewonnen werden.

Die Strecken $l''$ und $l'''$ dagegen können bei dem angewandten, in der Fig. 27 angedeuteten, Umklappungsprozefs nicht auseinander construiert werden, da sie sich nicht in affiner Lage befinden. Um sie in affine Lage zu bringen, mufs die $zy$ Ebene um die $z$ Axe gedreht werden, bis sie mit der $xz$ Ebene zusammenfällt. Dasselbe wird erreicht, wenn man in der Fig. 27 die $yz$ Ebene um $90^0$ in sich dreht. Der Affinitätspunkt ist dann $\pi''$.

Das Verhältnis $l : l' = 1 : \cos c$ bleibt auch dann noch bestehen, wenn man die projicierende Ebene von $l$ auf $l'$ in die erste Projectionsebene umlegt (Fig. 26). Es ist dann $\pi_1$ der Affinitätspunkt beider Strecken und es kann, wenn derselbe gegeben ist, wiederum die eine aus der andern construiert werden, wenn noch ein Punkt der einen Strecke gegeben ist.

## 28.

**Die Coordinaten eines Punktes, welcher die Verbindungsstrecke zweier Punkte in dem Verhältnis $k = \frac{m}{n}$ teilt.** Wenn ein Punkt $(x, y, z)$ die zwischen den Punkten $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ befindliche Strecke im Verhältnisse $m:n$ teilt, dann teilen die Projectionen dieses Punktes die Projectionen jener Strecke in demselben Verhältnisse. Denn sind $l_1$ und $l_2$ die Entfernungen des Punktes $(x, y, z)$ von den beiden festen Punkten, so ist der Annahme gemäss:

$$l_1 = \varrho\, m \text{ und } l_2 = \varrho\, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $\varrho$ die Einheit der Strecke $l_1 + l_2$ ist.

Nun ist aber nach Nummer **26**:

$$l_1''' = l_1 \cos a \qquad l_1'' = l_1 \cos b \qquad l_1' = l_1 \cos c$$
$$l_2''' = l_2 \cos a \qquad l_2'' = l_2 \cos b \qquad l_2' = l_2 \cos c$$

Hieraus folgt durch Division der untereinanderstehenden Formeln:

$$\frac{l_1'''}{l_2'''} = \frac{l_1''}{l_2''} = \frac{l_1'}{l_2'} = \frac{l_1}{l_2}$$

und es ist also mit Berücksichtigung von (1):

$$\frac{l_1'''}{l_2'''} = \frac{l_1''}{l_2''} = \frac{l_1'}{l_2'} = \frac{m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Drückt man nun die Coordinaten der Projectionen des Punktes $(x, y, z)$ mit Hilfe der Coordinaten der Projectionen der Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ unter gleichzeitiger Benutzung der (2) aus, was an der Hand der Figur 28 leicht auszuführen ist, so erhält man folgende Formeln:

$$x = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k}$$

$$y = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$z = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}$$

Dieselben gelten nach (**12**) auch für den Raumpunkt selbst. Indem man behufs Überführung der Formeln (3) in die (**26.**7) die auf den rechten Seiten angedeuteten Divisionen ausführt, ergeben sich zunächst die folgenden Formeln:

$$x = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{1 + k}$$

$$y = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{1 + k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$z = z_2 + \frac{z_1 - z_2}{1 + k}$$

Nun ist aber nach (1) $l_1 + l_2 = \varrho\,(m + n)$, daher hat man nach (**26.**1):

$$x_1 - x_2 = \varrho\,(m + n)\cos\alpha$$
$$y_1 - y_2 = \varrho\,(m + n)\cos\beta$$
$$z_1 - z_2 = \varrho\,(m + n)\cos\gamma$$

und da weiter

$$1 + k = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m + n}{n}$$

ist, so ist

$$\frac{x_1 - x_2}{k + 1} = \frac{\varrho\,(m + n)\cos\alpha}{\frac{m + n}{n}} = \varrho\, n\, \cos\alpha = l_2\, \cos\alpha$$

$$\frac{y_1 - y_2}{k + 1} = l_2\, \cos\beta$$

$$\frac{z_1 - z_2}{k + 1} = l_2\, \cos\gamma$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4), so ergibt sich endlich:

$$x = x_2 + l_2\, \cos\alpha \quad y = y_2 + l_2\, \cos\beta \quad z = z_2 + l_2\, \cos\gamma$$

Diese Formeln stimmen nun in der That mit den (**26.**7) überein; nur ist in letzteren die Entfernung des variabeln Punktes von dem festen Punkte mit $\varrho$ statt wie hier mit $l_2$ bezeichnet.

Die Coordinatenausdrücke (3) nehmen, wenn man setzt

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + k} \quad \lambda_2 = \frac{k}{1 + k}$$

die einfachere Gestalt an:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo ist:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$\lambda_1$ und $\lambda_2$ bedeuten natürlich nur reine Zahlen. Diese Form der Coordinatenausdrücke ist für die Rechnung viel bequemer.

Setzt man in (5):

$$\lambda_1 = -\frac{\mu_1}{\mu} \qquad \lambda_2 = -\frac{\mu_2}{\mu}$$

so nehmen diese Formeln die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \mu x + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 &= o \\ \mu y + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 &= o \\ \mu z + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wenn gleichzeitig ist:

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 = o \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Als Satz ausgesprochen sagen diese Formeln:

Wenn drei Punkte auf einer Geraden liegen, so lafsen sich immer drei Zahlen, deren Summe Null ist, finden, so dafs, wenn man die gleichnamigen Coordinaten der Punkte damit multipliciert, die Summe der Produkte verschwindet.

Der Satz gilt auch umgekehrt:

Lassen sich drei Zahlen so bestimmen, dafs die Summe der Produkte, welche sich ergeben, wenn man die gleichnamigen Coordinaten dreier Punkte mit den Zahlen multipliciert, verschwindet, dann liegen die drei Punkte auf einer Geraden, wenn die Summe jener drei Zahlen Null ist,

## 29.

### Parameterverteilung auf einer Geraden. Die Punktreihe.

Die Formeln (28.3) setzen uns in den Stand, die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Geraden, welche durch die festen Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ bestimmt ist, zu berechnen, wenn das Verhältnis $k$ seiner Abstände von diesen Punkten gegeben ist. In diesen Formeln denkt man sich also den Punkt zuerst durch das Verhältnis zweier Strecken also rein geometrisch und erst hernach durch seine Coordinaten oder rein analytisch bestimmt. Es sind demnach diese beiden Bestimmungsweisen eines Punktes durch jene Formeln zu einander in Beziehung gesetzt. Die veränderliche Zahl $k$ in den Formeln heifst Parameter. Der Parameter kann alle Werte annehmen von $-\infty$ bis $+\infty$, und es entspricht jedem speziellen Werte desselben ein und nur ein Punkt der Geraden. So entspricht dem Werte $k = o$ der Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ und dem Werte $k = \pm\infty$ der Punkt $(x_2, y_2, z_2)$. Letztere Behauptung erwahrheitet sich aus folgender Form, die man den (28.3) durch Division mit $k$ im Zähler und Nenner geben kann:

$$x = \frac{x_2 + \frac{1}{k} x_1}{1 + \frac{1}{k}} \qquad y = \frac{y_2 + \frac{1}{k} y_1}{1 + \frac{1}{k}} \qquad z = \frac{z_2 + \frac{1}{k} z_1}{1 + \frac{1}{k}}$$

Dem Werte $k = 1$ entspricht der Punkt:

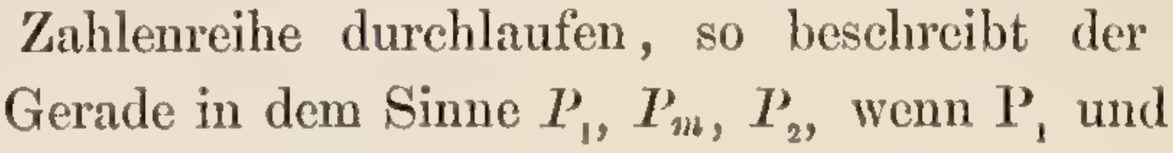
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

in der Mitte der beiden festen Punkte; für $k = -1$ erhält man:

$$x = \infty \qquad y = \infty \qquad z = \infty$$

Formen, welche anzeigen, dafs es nicht möglich ist, den Punkt, für welchen $k = -1$ ist, durch seine rechtwinkligen Coordinaten zu bestimmen. Der Wert $k = -1$ zeigt aber an, dafs er auf der Geraden vorhanden ist, und weil seine Coordinaten unendlich werden, so nennt man ihn den unendlich fernen Punkt der Geraden,

Wenn man sich nun erlaubt, jedem Punkte einer Geraden seinen Parameterwert als die charakteristische Zahl, welche ihn von den andern Punkten der Geraden unterscheidet, beizulegen, so ergibt sich das in folgender Figur dargestellte Bild der Verteilung der Parameterwerte $k$ auf der Geraden:




Die positiven Werte von $k$ gehören jenen Punkten zu, welche innerhalb der von den beiden festen Punkten $o$ und $\infty$ gebildeten Strecke liegen, den negativen Werten von $k$ dagegen entsprechen die Punkte aufserhalb dieser Strecke. Die Punkte, deren Parameterwerte negativ und kleiner als 1 sind, haben den Punkt mit dem Parameterwerte $o$ zur Grenze; die Punkte dagegen, deren Parameterwerte negativ und gröfser als 1 sind, haben den Punkt mit dem Parameterwerte $\infty$ zur Grenze. Die Punkte der Geraden folgen also aufeinander wie die Werte der Zahlenreihe $o$, 1, $\pm\infty$, $-1$, $o$. Läfst man daher in (**28.**3) den Parameterwert $k$ diese Zahlenreihe durchlaufen, so beschreibt der Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ die Gerade in dem Sinne $P_1, P_m, P_2$, wenn $P_1$ und $P_2$ die Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ und $P_m$ den Mittelpunkt beider bezeichnen. Läfst man dagegen den Parameter $k$ die Werte der Zahlenreihe im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, so beschreibt der Punkt $(x, y, z)$ die Gerade im Sinne $P_2, P_m, P_1$, welcher dem vorigen entgegengesetzt ist.

Dividiert man die rechten Seiten der Formeln (**28.**3) im Zähler und Nenner mit $k$, und setzt:

$$\frac{1}{k} = k'$$

so gehen dieselben über in:

$$x = \frac{x_2 + k' x_1}{1 + k'} \qquad y = \frac{y_2 + k' y_1}{1 + k'} \qquad z = \frac{z_2 + k' z_1}{1 + k'}$$

Die Parameterverteilung ist in diesem Falle so, dafs jedem Punkte der umgekehrte Parameterwert entspricht wie vorhin,

Die Punkte mit den Parameterwerten $+1$ und $-1$ sind die einzigen, deren Parameterwerte sich nicht geändert haben.

Wir ziehen die gewonnenen Resultate zusammen in dem Satze:

> Die Coordinaten der Punkte einer Raumgeraden, welche durch zwei feste Punkte gegeben ist, stellen sich dar als lineare Funktionen eines Parameters $k$, dessen $o$ und $\infty$ Werten die beiden festen Punkte entsprechen. Die Punkte, welche den positiven Parameterwerten entsprechen, liegen innerhalb, die Punkte, welche den negativen Parameterwerten entsprechen, liegen aufserhalb der von den beiden Punkten gebildeten Strecke.

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs das Verhältnis, in welchem der variabele Punkt $P$ die Entfernung der festen Punkte $P_1$ und $P_2$ teilt, immer im folgenden Sinne zu bilden ist:

Wenn $P_1, P_m, P_2$ der Sinn der Geraden ist, so ist:

$$k = \frac{\overline{P_1 P}}{\overline{P P_2}}$$

und wenn $P_2, P_m, P_1$ der Sinn der Geraden ist, so ist:

$$k = \frac{\overline{P_2 P}}{\overline{P P_1}}$$

wobei immer zu setzen ist:

$$\overline{P P_1} = -\overline{P_1 P} \qquad \overline{P_2 P} = -\overline{P P_2} \text{ etc. etc.}$$

## 30.

**Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.** Die Verhältnisse der Coordinaten eines Punktes der durch zwei feste Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ bestimmten Geraden haben die Werte:

$$\frac{z}{x} = \frac{z_1 + kz_2}{x_1 + kx_2} \qquad \frac{z}{y} = \frac{z_1 + kz_2}{y_1 + ky_2}$$

Dieselben bestimmen nach (**25**) die Verhältnisse der Cosinuse der Winkel, welche der Radiusvector des Punktes $(x, y, z)$ mit den Axen bildet, und somit die Richtung des letzteren. Diese Verhältnisse nehmen für $k = -1$, also in dem Falle, wenn die Coordinatenausdrücke (**28.3**) unendlich werden, die Werte an:

$$\frac{z}{x} = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} \qquad \frac{z}{y} = \frac{z_1 - z_2}{y_1 - y_2} \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Ausdrücke rechts geben nun die Richtung des Strahls an, der, vom Coordinatenanfang aus gezogen, die Gerade in ihrem unendlich fernen Punkte trifft. Dieser Strahl ist parallel mit der gegebenen Geraden. Es ist deshalb der unendlich ferne Punkt identisch mit jenem Punkte, der auftritt, wenn eine Gerade, indem sie sich um einen festen Punkt dreht, eine feste Gerade fortwährend schneidet und der die Lagen, bei welchen die bewegliche Gerade mit der festen Geraden spitze Winkel bildet, trennt von jenen Lagen, bei welchen sie stumpfe Winkel mit ihr bildet. Der unendlich ferne Punkt einer Geraden ermöglicht es, von einem beliebigen Punkte einer Geraden zu jedem anderen Punkte derselben in vorgeschriebenem Sinne zu gelangen.

Die Vorstellung einer im Unendlichen geschlossenen geraden Linie, wie sie sich hier ergeben hat, legt uns einen Zwang auf, dem wir uns nur mit Widerstreben fügen. Allein die analytische Notwendigkeit dieser Vorstellung ist gestützt durch die geometrische. Eine Kontrolle der bei Benützung des unendlich fernen Punktes auf analytischem Wege gewonnenen Resultate durch rein geometrische Betrachtung mufs daher auch immer die Richtigkeit derselben ergeben. Eine andere Kontrolle aber gibt es nicht.

In der analytischen Bestimmung des unendlich fernen Punktes durch seine Coordinaten $x = y = z = \infty$ sind sämtliche drei Stücke des Punktes unendlich grofs. Man kann aber diese drei Bestimmungsstücke durch drei andere ersetzen, von welchen nur ein einziges einen unendlich grofsen Wert hat. Es ist nämlich jeder Punkt der Geraden bestimmt, wenn man kennt:

1) die Richtung:

$$\frac{z}{x} = \frac{z_1 + kz_2}{x_1 + kx_2} \qquad \frac{y}{x} = \frac{y_1 + ky_2}{x_1 + kx_2} \quad . \quad . \quad (2)$$

und 2) die Länge:

$$\frac{1}{1+k}\sqrt{(x_1 + kx_2)^2 + (y_1 + ky_2)^2 + (z_1 + kz_2)^2} \quad . \quad (3)$$

seines Radiusvector.

In dem Falle nun, dafs $k = -1$ ist, gehen die Ausdrücke (2) in die (1) über, und haben folglich endliche Werte, während der Radiusvector (3) unendlich grofs wird.

Von den drei Konstruktionselementen eines unendlich fernen Punktes können daher nur zwei zur Verwendung kommen, nämlich diejenigen, welche die Richtung bestimmen, in welcher der unendlich ferne Punkt zu suchen ist, oder wie man sich kürzer ausdrückt, die zwei Elemente, welche die Richtung des unendlich fernen Punktes bestimmen. Nach der obigen Darstellung ist nämlich klar, dafs alle Geraden, welche dieselbe Richtung haben, denselben unendlich fernen Punkt besitzen. Da aber eine Gerade bestimmt ist durch zwei im Endlichen gelegene Punkte, und da anderseits dieselbe auch bestimmt ist durch einen im Endlichen gelegenen Punkt und eine Richtung, so mufs, da letztere durch den sie bestimmenden unendlich fernen Punkt ersetzt werden kann, der letztere, als ein Punkt dieser Geraden aufgefafst, äquivalent sein einem im Endlichen gelegenen Punkt.

## 31.

**Harmonische Punkte.** Insoferne eine Gerade durch ihren unendlich fernen Punkt als im Unendlichen geschlossen gedacht werden mufs, kann man sagen, dafs durch zwei Punkte einer Geraden zwei Strecken begrenzt werden, wovon die eine ihrer ganzen Ausdehnung nach in das Endliche fällt, während die andere auf den beiden äufseren Seiten der Punkte in das Unendliche sich verliert. Rufen wir nun das Bild der Parameterverteilung für die Punkte einer Geraden zurück, so erkennt man

sofort, dafs zwei Punkte, deren Parameterwerte sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, und also dem absoluten Werte nach gleich sind, die beiden eben genannten Strecken in gleichem Verhältnisse, oder harmonisch, teilen.

Wir nennen nun irgend zwei Punkte einer Geraden ein Punktepaar, und insoferne wir die Gerade durch sie bestimmt denken, heifsen die Punkte des Paares Grundpunkte. Zwei Punkte, deren in Bezug auf ein Grundpunktepaar berechnete Parameterwerte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, bilden das, was man ein conjugiertes Punktepaar nennt.

Ein conjugiertes Punktepaar liegt also zu seinem Grundpunktepaar immer so, dafs der eine Punkt desselben in dem einen, der andere in dem anderen der von dem letzteren gebildeten Segmente liegt. Wir definieren nun:

> Ein conjugiertes Punktepaar ist zu seinem Grundpunktepaar harmonisch,

und beweisen den umgekehrten Satz:

> Das Grundpunktepaar ist zu jedem zu ihm conjugierten Punktepaar harmonisch.

Der Beweis ist einfach. Die Parameterwerte der Grundpunkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ seien $o$ und $\infty$. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes mit dem Parameter $\lambda$ sind dann:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (1)$$

Nach der Definition sind aber $\lambda_1$ und $-\lambda_1$ die Parameterwerte der Punkte eines conjugierten Punktepaares und:

$$\frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1} \qquad \frac{y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda_1} \qquad \frac{z_1 + \lambda_1 z_2}{1 + \lambda_1}$$

$$\frac{x_1 - \lambda_1 x_2}{1 - \lambda_1} \qquad \frac{y_1 - \lambda_1 y_2}{1 - \lambda_1} \qquad \frac{z_1 - \lambda_1 z_2}{1 - \lambda_1}$$

ihre Coordinaten. Betrachtet man nun die letzteren als Grundpunkte, so sind, wenn man die Gerade im gleichen Sinn durchläuft:

$$\frac{\frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1} + k \frac{x_1 - \lambda_1 x_2}{1 - \lambda_1}}{1 + k}, \text{ u. s. w.}$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes mit dem Parameter $k$. Soll nun dieser Punkt identisch sein mit dem Punkte (1), so erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{x_1 + x_2 \frac{1 - \lambda_1 - k(1 + \lambda_1)}{1 - \lambda_1 + k(1 + \lambda_1)} \lambda_1}{1 + \frac{1 - \lambda_1 - k(1 + \lambda_1)}{1 - \lambda_1 + k(1 + \lambda_1)} \lambda_1} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

folgende Bedingung hiefür:

$$\lambda = \frac{1 - \lambda_1 - k(1 + \lambda_1)}{1 - \lambda_1 + k(1 + \lambda_1)} \lambda_1$$

Da nun $\lambda_1$ und $-\lambda_1$ die Parameterwerte der Grundpunkte sind, so mufs für $\lambda = \lambda_1$ $k = o$ und $\lambda = -\lambda_1$ $k = \infty$ werden. In der That ergeben sich diese Werte aus vorstehender Relation. Für $\lambda = o$ und $\lambda = \infty$ dagegen findet man:

$$k_1 = \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

Da aber $\lambda_1$ und $-\lambda_1$ ein beliebiges Punktepaar war, und $k_1 = -k_2$ ist, so ist der Satz hiermit bewiesen.

Den Inbegriff aller conjugierter Punktepaare einer harmonischen Punktreihe nennt man eine Involution. Die Grundpunkte heifsen die Doppelpunkte, der Halbierungspunkt der von ihnen gebildeten inneren Strecke heifst das Centrum und die halbe Strecke selbst (oder auch das Quadrat derselben) die Potenz der Involution. Sind nämlich $\lambda$ und $\lambda'$ die Parameter der Punkte eines conjugierten Paares, so durchläuft der Punkt $\lambda$ die Punktreihe vom Nullpunkt bis zum unendlich fernen Punkt, wenn der Punkt $\lambda'$ sich vom Nullpunkt bis zum Centrum bewegt. Überschreitet letzterer das Centrum und bewegt sich gegen den Unendlichkeitspunkt (wie wir den Grundpunkt, dessen Parameter $\infty$ ist, kurz nennen wollen), so tritt der Punkt $\lambda$ von dem unendlich fernen Punkte aus auf der andern Seite der Punktreihe in das

Endliche ein und eilt dem Unendlichkeitspunkte zu, wo sie dann beide zusammentreffen. Der Unendlichkeitspunkt ist daher ein sich selbst conjugierter Punkt oder ein Doppelpunkt. Bewegt sich dann im weiteren Verlaufe der Punkt $\lambda$ gegen das Centrum, so beschreibt $\lambda'$ die Strecke zwischen dem Unendlichkeitspunkte und dem unendlich fernen Punkte und wenn endlich $\lambda$ im Nullpunkte anlangt, so ist dies auch der Fall mit $\lambda'$. Der Nullpunkt ist also gleichfalls sich selbst conjugiert, er ist ein Doppelpunkt.

Man ersieht aus diesem Bewegungsvorgang, dafs wenn $\lambda$ die Punktreihe vom Nullpunkte aus in vorgeschriebenem Sinne beschreibt, der Punkt $\lambda'$ dieselbe Punktreihe ebenfalls vom Nullpunkte aus, aber im entgegengesetzten Sinne, beschreibt. Beide Punktreihen unterscheiden sich also durch den Sinn, in dem sie beschrieben sind. Man sagt, sie seien zueinander conjugiert.

Die analytische Bedingung zwischen den Parameterwerten der conjugierten Punkte einer harmonischen Punktreihe ist nach der Definition:

$$\lambda + \lambda' = o \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{\lambda'} = -1$$

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes $\lambda$ von den Grundpunkten beziehungsweise mit $\varrho m$ und $\varrho n$ wie in (28.$_1$), mit $\mu$ die Entfernung desselben Punktes vom Centrum der Involution, und mit $p$ die Potenz der letzteren, dann ist:

$$\begin{aligned} \mu &= \varrho m - p \\ \mu &= \varrho n + p \end{aligned} \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{m}{n} = -\frac{\mu + p}{\mu - p}$$

Sind ferner $\varrho' m$, $\varrho' n$ und $\mu'$ die den vorigen entsprechenden Entfernungen des Punktes $\lambda'$, dann ist ebenfalls:

$$\begin{aligned} \mu' &= \varrho' m - p \\ \mu' &= \varrho' n + p \end{aligned} \quad \text{also } \lambda' = -\frac{m}{n} = -\frac{\mu' + p}{\mu' - p}$$

Somit geht obige Bedingungsgleichung der Involution über in:

$$\frac{\mu + p}{\mu - p} + \frac{\mu' + p}{\mu' - p} = o$$

oder:

$$\mu\mu' = p^2 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wählt man also jetzt einen beliebigen Punkt in der Entfernung $\mu$ vom Centrum, so liefert vorstehende Gleichung die Entfernung $\mu'$ seines conjugierten Punktes. Für $\mu = \mu'$ erhält man die beiden Doppelpunkte der Involution. Das eine Vorzeichen der Wurzel:

$$\mu = \pm p$$

entspricht dem positiven Sinne der Involution, das andere dem negativen Sinne. Durch das Centrum, als dem Ausgangspunkte der Zählung, und den einen Doppelpunkt $\mu = +p$ ist die Involution bestimmt; durch das Centrum und den Doppelpunkt $\mu = -p$ ist die zu ihr conjugierte Involution, d. i. dieselbe Involution im entgegengesetzten Sinne genommen, bestimmt.

Damit haben wir uns wieder der Darstellung der Zahlen durch Strecken, also dem gewöhnlichen Coordinatenbegriff, genähert. Dieselbe ist aber eine gehaltvollere geworden dadurch, dafs wir uns jede Strecke als Potenz einer Involution vorstellen können. Der Anfangspunkt der Strecke ist das Centrum, der Endpunkt ein Doppelpunkt und der Sinn der Strecke der Sinn der Involution.

## 32.

**Gleichung des Punktes.** Zum Schlusse dieses Abschnittes soll nun noch eine Concentration der in (**11**) aufgestellten drei Gleichungen, welche den Punkt $(a, b, c)$ darstellen, vorgenommen werden. Wir schreiben sie deshalb nochmals hierher:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1) \\ z &= c \end{aligned}$$

und erinnern uns, dafs $(x, y, z)$ den allgemeinen Coordinatenbegriff eines Punktes repräsentiert, während $(a, b, c)$ ein dem allgemeinen Begriff entsprechendes Objekt, einen bestimmten Punkt, bezeichnet. Da $x$, $y$, $z$ drei beliebige reelle Zahlen sind und jede dieser Zahlen einfach unendlich viele Werte annehmen kann, so sagt man, dafs die Anzahl der Punkte des Raumes dreifach unendlich sei. Unter den dreifach unendlich vielen Punkten des Raumes greifen

also die (1) ein Individuum $(a, b, c)$ heraus. Unsere Aufgabe sei jetzt, nachzuforschen, ob das Herausgreifen eines Individuums nicht durch eine einzige Gleichung gefordert werden kann.

Zu diesem Zwecke haben wir eine solche Kombination der Gleichungen (1) vorzunehmen, die linear ist in Bezug auf $x, y, z$, oder die, wenn sie höhern Grades sein sollte, doch für reelle Werte von $x, y, z$ wieder in die Gleichungen (1) zerfällt.

In letzterer Beziehung existieren folgende Formen der concentrierten Gleichungen (1):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = o \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

und:

$$(x - a)\,(y - b)\,(z - c) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Alle andern Kombinationen höheren Grades von der verlangten Eigenschaft lassen sich auf diese beiden reduzieren.

Nun stellt allerdings die $(\beta)$ den Punkt $(a, b, c)$ dar, aufserdem aber noch alle andern Punkte seiner drei Construktionsebenen; denn zur Befriedigung der Gleichung genügt es, dafs nur ein einziger Faktor der linken Seite gleich Null gesetzt werde. Ein solcher Faktor repräsentiert dann aber nach (24) eine Construktionsebene des Punktes $(a, b, c)$. Die Form $(\beta)$ stellt also nicht einen Punkt dar, wie verlangt wurde, sondern die Punkte dreier Ebenen, also kurzweg drei Ebenen. Sie ist deshalb als eine für unsern Zweck geeignete Concentration der Gleichungen (1) nicht zu betrachten. Dagegen ist die Form $(\alpha)$ brauchbar; denn die Summe der Quadrate dreier reeller Zahlen verschwindet nur dann, wenn jede Zahl für sich zu Null wird.

Es bleibt uns also jetzt noch die Untersuchung der linearen Combination der Gleichungen (1).

Zu diesem Zwecke multiplicieren wir die erste derselben mit der ganz beliebigen Zahl $\xi$, die zweite mit der ebenfalls willkürlichen Zahl $\eta$, die dritte mit einer ebensolchen Zahl $\zeta$, und addieren; dann ergibt sich:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \xi a + \eta b + \zeta c \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In der That zeigt diese Gleichung, wenn man die Methode der unbestimmten Coëfficienten anwendet, dafs die linke Seite nur

dann der rechten gleich ist, unabhängig von den Werten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, wenn die (1) bestehen. Es ist also die (2) eine Concentration der Gleichungen (1). Gibt man nämlich $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in (2) ganz willkürliche Werte, so erhält man eine lineare Gleichung in $x$, $y$, $z$, welche zweifach unendlich viele Lösungen zuläfst. Unter diesen ist auch die Lösung (1) enthalten. Für andere Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gibt es wieder ein anderes System zweifach unendlich vieler Lösungen, welches jedoch mit dem ersten System einfach unendlich viele Lösungen gemeinschaftlich hat, darunter auch die Lösung (1). Die zweimal zweifach unendlich vielen Lösungssysteme der (2) haben also die Lösung (1) gemeinschaftlich und nur diese, mit andern Worten, diese Lösung ist unabhängig von den Werten von $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten ist aber auch klar, dafs es nicht notwendig gewesen wäre, drei willkürliche Zahlen einzuführen. Denn die (2) liefert auch dann noch nach dieser Methode die Gleichungen (1), wenn eine der drei Zahlen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ der Einheit gleich gesetzt wird, oder wenn dieselbe in irgend einer Weise von den beiden andern abhängig gemacht wird. Denn der Effekt ist dann blos der, dafs an die Stelle dieser Zahl eine andere tritt, die eben, weil sie von zwei willkürlichen Zahlen abhängig gemacht wurde, zwar nicht in Rücksicht auf diese letzteren, aber doch in Bezug auf jede andere Zahl ebenfalls willkürlich ist.

Indem wir also setzen:

$$\xi a + \eta b + \zeta c = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^a)$$

führen wir an Stelle der willkürlichen Zahl, z. B. $\zeta$, die auf der rechten Seite stehende willkürliche Zahl $C$ ein. Es ist demnach jetzt

$$\zeta = \frac{C - a\xi - b\eta}{c}$$

in (2) einzusetzen, wodurch dieselbe die Gestalt annimmt:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^b)$$

oder:

$$\xi x + \eta y + \frac{C - a\xi - b\eta}{c} z = C$$

Ordnet man die letzte Gleichung nach den willkürlichen Zahlen $\xi$, $\eta$, $C$, so ergibt sich:

$$\xi(cx - az) + \eta(cy - bz) + C(z - c) = o \quad . \quad . \quad (4)$$

Man sieht nun in der That, dafs für willkürliche Werte von $\xi$, $\eta$, $C$ diese Gleichung die drei folgenden nach sich zieht:

$$cx - az = o$$
$$cy - bz = o$$
$$z - c = o$$

und dafs diese die Lösungen:

$$x = a \qquad y = b \qquad z = c$$

haben. Es stellt folglich die Gleichung (4) den Punkt $(a, b, c)$ dar.

Es ist dies insbesondere auch dann noch der Fall, wenn $C = \pm 1$ gesetzt wird. Wir wählen das untere Vorzeichen und setzen demgemäfs:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

also nach (2):

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Gleichungen (4), (5) und (6) sind zwar der Form nach verschieden, in ihrem Wesen unterscheiden sie sich jedoch nicht von einander. Man kann also auch die (6) als Gleichung eines Punktes $(x, y, z)$ oder die (5) als Gleichung des Punktes $(a, b, c)$ ansehen.

Damit jedoch diese Gleichungen einen praktischen Wert erhalten, müssen die Zahlen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einem geometrischen Gebilde assimiliert werden. Angenommen nun, die geometrische Bedeutung dieser drei Zahlen sei gefunden, dann kann dieselbe im speziellen Falle keine andere sein, als im allgemeinen Falle. Da nun für $\eta = o$ $\zeta = o$ die (2) die Ebene:

$$x - a = o$$

liefert, die (5) hingegen

$$\xi a = -1$$

so kann diese Gleichung in $\xi$ keine andere Bedeutung haben, als die vorige in $x$, da (2) und (5) ihrem Wesen nach nicht verschieden sind. Es mufs also die Gleichung:

$$\xi = -\frac{1}{a}$$

eine Ebene bestimmen, welche parallel der $yz$ Ebene ist und auf der $x$ Axe das Stück $a$ abschneidet. In der That steht auf der rechten Seite dieser Gleichung der negative reciproke Abschnitt, welchen diese Ebene auf der $x$ Axe macht, wodurch die geometrische Bedeutung von $\xi$ im speziellen Falle festgesetzt ist.

Setzt man in (5) und (2) gleichzeitig $\xi = o$ $\zeta = o$, dann findet sich:

$$y - b = o \qquad \eta = -\frac{1}{b}$$

und wenn endlich $\xi = o$ $\eta = o$ gesetzt wird:

$$z - c = o \qquad \zeta = -\frac{1}{c}$$

Wir erkennen also, dafs in den drei speziellen Fällen:

$$\xi = -\frac{1}{a} \qquad \eta = o \qquad \zeta = o$$

$$\xi = o \qquad \eta = -\frac{1}{b} \qquad \zeta = o$$

$$\xi = o \qquad \eta = o \qquad \zeta = -\frac{1}{c}$$

die drei Zahlen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die negativen reciproken Axenabschnitte der drei Constructionsebenen des Punktes $(a, b, c)$ und damit diese Ebenen selbst darstellen.

Die (5) wird auch befriedigt, wenn man setzt:

$$\xi a = -1 \qquad \eta b = -1 \qquad \zeta c = +1$$

oder:

$$\xi a = -1 \qquad \eta b = +1 \qquad \zeta c = -1$$

oder:

$$\xi a = +1 \qquad \eta b = -1 \qquad \zeta c = -1$$

Man erkennt ohne Mühe, dafs die hieraus sich ergebenden $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die reciproken negativen Axenabschnitte der drei Ebenen sind, welche durch den Punkt $(a, b, c)$ und durch die Diagonalen der ihm gegenüberliegenden Seitenflächen seines Parallelepipeds sich legen lassen. Auch diese drei Ebenen können als Constructionsebenen des Punktes $(a, b, c)$ betrachtet werden. Wir werden überhaupt später allgemein beweisen, dafs jede durch den Punkt $a, b, c$ gelegte Ebene auf den Axen Stücke abschneidet, deren negative reciproke Werte an die Stelle von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in (5) gesetzt, dieser Gleichung genügen.

Weil genannte Abschnitte immer eine Ebene unzweideutig bestimmen, so nennt man ihre negativen reciproken Werte die Coordinaten der Ebene. Die Variabeln $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in (2), (5) und (6) sind also als Ebenencoordinaten aufzufassen.

> Wenn also die Veränderlichen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in (5) Ebenencoordinaten bedeuten, so stellt diese Gleichung alle Ebenen dar, welche durch den Punkt $(a, b, c)$ gehen, und wenn wir den Punkt auffassen als den Inbegriff aller Ebenen, welche durch ihn gehen, so ist die (5) die **Gleichung dieses Punktes.**

Man kann nun auch umgekehrt beweisen, dafs jede lineare Gleichung in den veränderlichen Ebenencoordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einen Punkt darstellt. Es sei:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = o$$

eine solche Gleichung. Verbindet man mit ihr die Gleichung (6):

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = o$$

welche die Ebenencoordinaten mit den Punktcoordinaten in Beziehung setzt, dann ergibt sich durch Subtraction, nachdem vorher die erste Gleichung durch $D$ dividiert wurde:

$$\xi\left(x - \frac{A}{D}\right) + \eta\left(y - \frac{B}{D}\right) + \zeta\left(z - \frac{C}{D}\right) = o$$

Für willkürliche Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zerfällt diese aber in die drei Gleichungen:

$$x - \frac{A}{D} = o$$

$$y - \frac{B}{D} = o$$

$$z - \frac{C}{D} = o$$

wodurch die Behauptung dargethan ist.

In dem Falle, dafs $D = o$ ist, werden die Coordinaten des Punktes $(x, y, z)$ unendlich; es ist also:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes. Die Richtung, in welcher derselbe liegt, ist bestimmt durch

$$\frac{z}{x} = \frac{C}{A} \qquad \frac{y}{x} = \frac{B}{A}$$

## Übungsaufgaben.

1. Man bestimme Gröfse und Richtung der Entfernungen der Punkte $(+4, +2, +3)$, $(-3, +5, +2)$, $(+5, -4, -3)$, $(-6, -5\frac{1}{2}, +7)$, $(-4, +9, -3\frac{1}{4})$, $(+7, -5\frac{1}{8}, +11)$, $(+7, +10, -13)$, $(-9, -6, -8)$ vom Ursprunge. Ebenso die Gröfse und Richtung ihrer Projectionen auf die Coordinatenebenen.

Aufl. Man hat für $x = +5$, $y = -4$, $z = -3$:

$$l' = \sqrt{41} \qquad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{50}} \qquad \cos a = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{50}}$$

$$l'' = \sqrt{34} \qquad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{50}} \qquad \cos b = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{50}}$$

$$l''' = \sqrt{25} \qquad \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{50}} \qquad \cos c = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{50}}$$

$$l = \sqrt{50} \qquad \cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{41}} \qquad \cos\psi = \frac{-3}{\sqrt{34}} \qquad \cos\chi = \frac{-4}{\sqrt{25}}$$

2. Man bestimme die Coordinaten eines Punktes oberhalb der $xy$ Ebene, dessen Entfernung vom Coordinatenanfang gleich 15 sei, und mit den Axen der $x$ und $y$ Winkel von $70^0$ und $130^0$ bildet.

Aufl. Da die Bedingungen $\alpha+\beta>90^0$, $\beta-\alpha<90^0$ erfüllt sind, so existiert der Punkt. Man hat also zunächst $\gamma$ zu berechnen aus:

$$\cos\gamma = +\sqrt{\sin^2 70^0 - \cos^2 130^0}$$

und findet dann:

$$x = 15\cos 70^0 \qquad y = 15\cos 130^0 \qquad z = 15\sqrt{\sin^2 70^0 - \cos^2 130^0}$$

Läge der Punkt unterhalb der $xy$ Ebene, so müfste $\cos\gamma$ das negative Vorzeichen erhalten.

3. Die Verbindungsgerade eines Punktes bilde mit den Axen der $z$ und $x$ beziehungsweise Winkel von $60^0$ und $120^0$. Seine $x$ Coordinate habe den Wert $-10$. Welches sind die übrigen Coordinaten des Punktes.

Aufl. Da $\gamma = 60^0$ ist, so liegt der Punkt oberhalb der $xy$ Ebene und da $x=-10$ und $\alpha = 120^0$ ist, so kann er nur im zweiten oder dritten Oktanten liegen. Man hat nun zunächst:

$$\varrho\cos 120^0 = -10 \qquad \text{also} \qquad \varrho = \frac{10}{\sin 30} = 20$$

und

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1-(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Daher sind:

$$x = -10 \qquad y = \pm 20\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad z = 20\,.\,\tfrac{1}{2} = 10$$

die Coordinaten des Punktes. Das obere Vorzeichen von $\cos\beta$ verweist den Punkt in den zweiten, das untere in den dritten Oktanten.

4. Die Verbindungsgeraden der Projectionen eines Punktes bilden ein gleichseitiges Dreieck. Welches sind seine Coordinaten, oder wenn mehrere Punkte existieren, welches ist die Lage dieser Punkte? Zeichnung!

Aufl. Da die genannten Verbindungsgeraden immer den Projectionen des Radiusvector des Punktes gleich sind, so mufs für den Fall der Aufgabe:

$$l' = l'' = l'''$$

sein, woraus:

$$\pm x = \pm y = \pm z$$

folgt. Die Punkte der Halbierungsgeraden des Coordinatensystems haben also die gesuchte Eigenschaft.

5. Die zwei Projectionen $l''=5$ und $l'''=7$ einer vom Ursprunge ausgehenden Strecke und der Winkel $(l''z)=40^0$ seien gegeben. Man bestimme die Coordinaten des Endpunktes der Strecke. Zeichnung!

Aufl. Die Projection auf die $xz$ Ebene liefert:

$$x = \pm 5\sin 40^0 \qquad z = 5\cos 40^0$$

Ist $\chi$ der Winkel, den die Projection $l'''$ mit der $y$ Axe bildet, dann hat man:

$$y = 7 \cos \chi \qquad z = 7 \sin \chi$$

Somit hat man zur Bestimmung von $\chi$ die Gleichung

$$7 \sin \chi = 5 \cos 40^0$$

Daher gibt es für $\chi$ zwei Werte $\chi_1$ und $180^0 - \chi_1$ und es wird:

$$x = \pm\ 5 \sin 40^0 \qquad y = \pm\ 7 \cos \chi_1 \qquad z = 5 \cos 40^0$$

Die beiden $\chi_1$ und $180 - \chi_1$ entsprechenden Punkte liegen also im ersten und vierten oder im zweiten und dritten Oktanten, je nachdem $l''$ im ersten oder zweiten Quadranten der $xz$ Ebene angenommen wird.

6. Ein Punkt habe von der $x$ Axe den senkrechten Abstand 15 und von der $y$ Axe den senkrechten Abstand 20. Welches sind seine Coordinaten, wenn er auf einer Kugel vom Radius 22 liegt?

Aufl. Man hat:

$$z^2 + y^2 = 15^2 \qquad x^2 + z^2 = 20^2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 22^2$$

7. Die vorige Aufgabe allgemein zu lösen und anzugeben, in welchem Falle eine Lösung nicht möglich ist.

Aufl. Man hat die Gleichungen:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = r_1 \qquad \sqrt{x^2 + z^2} = r_2 \qquad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

also:

$$z = \pm \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - R^2}$$

Wenn also $R > \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ist, existiert kein reeller Wert des $z$, und wenn $r_2 > R$ und $r_1 > R$ ist, existieren auch keine reellen Werte des $y$ und des $x$.

8. Welches sind die Coordinaten eines Punktes, der auf einer Kugel vom Radius $r$ liegend, seine Projection in der $xy$ Ebene auf einer Geraden hat, welche mit der $x$ Axe den Winkel $\alpha$ bildet, und dessen Radiusvector mit der $xy$ Ebene den Winkel $\beta$ macht.

Aufl. Man hat für $x$, $y$, $z$ die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad y = x\ tg\ \alpha \qquad z = r \sin \beta$$

9. Man soll auf einer der Halbierungslinien des Coordinatensystems einen Punkt aufsuchen, dessen Entfernung vom Ursprung gleich dem Produkte seiner Coordinaten sei.

Aufl. Es mufs sein:

$$x = y = z \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = xyz$$

also hat man:

$$\sqrt{3\,x^2} = x^3 \quad \text{oder} \quad x^6 - 3\,x^2 = 0$$

Die Lösung $x^2 = o$ ist ohne Bedeutung. Die Lösungen:

$$x = y = z = \sqrt[4]{3}$$

liefern 2 Punkte auf jeder Halbierungslinie von der gesuchten Eigenschaft.

10. Wo liegen alle Punkte, deren Radiusvector mit der $z$ Axe einen konstanten Winkel $\varphi$ bildet.

Aufl. Seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines solchen Punktes, dann ist:

$$z = l' \cos\varphi$$

für alle Punkte, wenn gleichzeitig ist:

$$l' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Gleichung:

$$z^2 - (x^2 + y^2)\cos^2\varphi = o$$

ist daher die einzige, welche zwischen den Coordinaten des Punktes besteht. Es sind also davon immer zwei willkürlich und da eine gleichzeitige geometrische Betrachtung lehrt, dafs diese zweifach unendlich vielen Punkte, deren Coordinaten der Gleichung genügen, auf einer Kegelfläche, deren Spitze der Ursprung ist, liegen, so sagt man, die Gleichung sei die Gleichung dieser Kegelfläche.

11. Man berechne die Entfernung der beiden Punkte $(-3, +5, -7)$ und $(1, 3, 4)$ und bestimme die Winkel ihrer Verbindungsgeraden mit den Axen.

Aufl. Es ist:

$$l = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-3)^2 + (-7-4)^2} = \sqrt{141}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{141}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{141}} \qquad \cos\gamma = \frac{-11}{\sqrt{141}}$$

Da aber $z_2 - z_1 = -7 - 4 = -11$ negativ ist, so erhält man die Winkel bestimmt durch:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{141}} \qquad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{141}} \qquad \cos\gamma = \frac{11}{\sqrt{141}}$$

Die durch die ersteren Formeln gegebenen Winkel gelten, wenn man die Strecke im Sinne $(1, 2, 4)$ nach $(-3, 5, -7)$ durchläuft, die durch die letzteren bestimmten Winkel sind jene, die durch das Durchlaufen der Strecke im entgegengesetzten Sinne erhalten werden.

12. Es sei auf jeder Coordinatenebene ein Punkt gegeben. Man bestimme die Seiten des von diesen drei Punkten gebildeten Dreiecks und ihre Richtungen.

Aufl. Die Coordinaten der Punkte seien $(a, b, o)$; $(c, o, d)$; $(o, f, g)$ und die Seiten des Dreiecks $s_1$, $s_2$, $s_3$. Dann ist:

$$s_1 = \sqrt{(a-c)^2 + d^2 + b^2}$$
$$s_2 = \sqrt{a^2 + g^2 + (b-f)^2}$$
$$s_3 = \sqrt{c^2 + f^2 + (d-g)^2}$$

und:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a-c}{s_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{b}{s_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{-d}{s_1}$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{a}{s_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{b-f}{s_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{-g}{s_2}$$
$$\cos\alpha_3 = \frac{c}{s_3}, \quad \cos\beta_3 = \frac{-f}{s_3}, \quad \cos\gamma_3 = \frac{d-g}{s_3}$$

13. Der Punkt $(2, -5, +7)$ sei gegeben. Man suche einen Punkt in der Entfernung 20, dessen Verbindungsgerade mit ihm mit der $x$ Axe einen Winkel von $75^0$ und mit der $y$ Axe einen solchen von $60^0$ bildet.

Aufl. Man bestimme zunächst den Winkel, den die Verbindungsgerade mit der $z$ Axe bildet, aus:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2 60 - \cos^2 75}$$

Sind dann $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des gesuchten Punktes, so hat man:

$$x - 2 = 20\cos 75^0 \quad y + 5 = 20\cos 60 \quad z - 7 = 20\cos\gamma$$

14. Der feste Punkt $(-5, -6, +7)$ sei gegeben. Man bestimme auf der $xy$ Ebene einen Punkt, der von ihm die Entfernung 15 und vom Coordinatenanfang die Entfernung 6 hat.

Aufl. Sind $x$, $y$ die Coordinaten des Punktes, so hat man die Gleichungen:

$$(x+5)^2 + (y+6)^2 + (o-7)^2 = 15^2$$
$$x^2 + y^2 = 6^2$$

welche sich auf die einfacheren reduzieren:

$$10x + 12y = 79$$
$$x^2 + y^2 = 36$$

woraus zwei Werte von $x$, und ebenso zwei Werte von $y$ resultieren. Es gibt also vier Punkte, die paarweise symmetrisch zum Coordinatenanfangspunkt liegen.

15. Der feste Punkt $(-2, +3, -5)$ sei gegeben. Man bestimme auf der Halbierungslinie $x = y = z$ des Coordinatensystems einen Punkt, dessen Entfernung von ihm 10 sei.

Aufl. Die Gleichung:

$$(x+2)^2+(x-3)^2+(x+5)^2=10^2 \quad \text{oder} \quad 3x^2+8x=62$$

löst die Aufgabe, und es gibt somit im Allgemeinen zwei Punkte von der verlangten Eigenschaft.

16. Der feste Punkt $(7, -8, -9)$ sei gegeben. Man bestimme auf der $xz$ Ebene den Punkt, dessen Verbindungsgerade mit jenem der Halbierungsgeraden des Coordinatensystems $x=-y=-z$ parallel ist.

Aufl. Die Winkel, welche die Halbierungsgerade mit den Axen bildet, sind:

$$180°-\alpha, \qquad \alpha, \qquad \alpha, \qquad \cos\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Man hat also, wenn $x$, $z$ die Coordinaten des gesuchten Punktes sind:

$$x-7=-\varrho\sqrt{\tfrac{1}{3}} \qquad 8=+\varrho\sqrt{\tfrac{1}{3}} \qquad z+9=+\varrho\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

woraus folgt:

$$\varrho=8\sqrt{3} \qquad x=-1 \qquad z=-1$$

17. Es seien in der $xy$ Ebene drei Punkte gegeben $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$. Man bestimme einen Punkt aufserhalb dieser Ebene, der von den drei Punkten gleiche Entfernungen hat.

Aufl. Es mufs sein, wenn $h$ den Abstand des Punktes von der $xy$ Ebene bedeutet:

$$h^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=h^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2= \\ =h^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$$

Die Coordinaten $x$ und $y$ ergeben sich also aus den Gleichungen:

$$x(x_2-x_1)+y(y_2-y_1)=x_2^2+y_2^2-(x_1^2+y_1^2)$$
$$x(x_3-x_1)+y(y_3-y_1)=x_3^2+y_3^2-(x_1^2+y_1^2)$$

18. Welches sind die Coordinaten der Punkte $(3, 4, -2)$, $(5, -6, 3)$, wenn dieselben um den Schnitt ihrer gemeinschaftlichen projicierenden Ebene in die $xy$ Ebene umgeklappt werden?

Aufl. Zunächst ist:

$$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{104}} \qquad \sin\varphi=\frac{10}{\sqrt{104}}$$

und man hat daher:

$$x'=3-2\frac{10}{\sqrt{104}} \qquad x''=5+3\frac{10}{\sqrt{104}}$$
$$y'=4-2\frac{2}{\sqrt{104}} \qquad y''=-6+3\frac{2}{\sqrt{104}}$$

19. Man bestimme die Coordinaten eines Punktes, der auf der Verbindungslinie der beiden Punkte (1, —2, 3) und (5, — 4, 7) liegt und von dem ersteren Punkte den Abstand 2 hat.

Auf l. Der Abstand von dem andern Punkte ist entweder 4 oder 8; daher existieren zwei Punkte. Für den einen ist $k = \frac{1}{2}$ für den andern $k = -\frac{1}{4}$.

## IV. Das Dreieck und das Polygon.

### 33.

**Winkel, den zwei vom Ursprung aus nach zwei Punkten gezogene Strahlen miteinander bilden.** Es seien $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ die beiden Punkte. Ihre Entfernungen vom Coordinatenanfangspunkt seien beziehungsweise $\varrho_1$ und $\varrho_2$ und die von letzteren mit den Coordinatenaxen gebildeten Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Der Winkel $v$ zwischen den Strecken $\varrho_1$ und $\varrho_2$ ergibt sich dann auf folgende Weise:

Es ist nach (25):

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho_1 \cos\alpha_1 & x_2 &= \varrho_2 \cos\alpha_2 \\ y_1 &= \varrho_1 \cos\beta_1 & y_2 &= \varrho_2 \cos\beta_2 \\ z_1 &= \varrho_1 \cos\gamma_1 & z_2 &= \varrho_2 \cos\gamma_2 \end{aligned} \quad \ldots \quad (1)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (26.2) findet man als Entfernung $l$ der beiden Punkte:

$$l^2 = (\varrho_1 \cos\alpha_1 - \varrho_2 \cos\alpha_2)^2 + (\varrho_1 \cos\beta_1 - \varrho_2 \cos\beta_2)^2 + \\ + (\varrho_1 \cos\gamma_1 - \varrho_2 \cos\gamma_2)^2$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel aber hat man aus dem Dreiecke, welches von den Seiten $\varrho_1$, $\varrho_2$ und $l$ gebildet wird, auch

$$l^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos v$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für, $l^2$ ergibt sich dann, wegen

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

folgende Formel für den Cosinus des gesuchten Winkels $v$:

$$\cos v = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad . \quad (2)$$

oder indem man die Cosinuse auf der rechten Seite dieser Formel durch die Coordinaten der beiden Punkte nach (**25**) ausdrückt:

$$\cos v = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad . \quad . \quad (3)$$

Die beiden Wurzeln sind wieder als reine Zahlen zu nehmen. Der Winkel $v$ ist also spitz oder stumpf, je nachdem

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \lessgtr o$$

ist. Haben also die $x$, die $y$ und die $z$ Coordinaten der beiden festen Punkte entgegengesetzte Vorzeichen, oder was dasselbe sagen will, liegen die beiden Punkte in entgegengesetzten Oktanten, so ist der Winkel $v$ ein stumpfer; sind die Vorzeichen dagegen gleich, so ist $v$ ein spitzer Winkel; findet das eine und das andere teilweise statt, so kann der Winkel ebensowohl spitz als stumpf sein. Er ist immer spitz, wenn die beiden Punkte im gleichen Oktanten liegen, stumpf oder spitz dagegen, wenn sie in verschiedenen Oktanten liegen. Ist

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = o$$

so ist der Winkel ein rechter. Betrachtet man also den Punkt $(x_2, y_2, z_2)$ als fest, den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ dagegen als veränderlich, so gibt die Gleichung

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

den Ort aller Punkte an, deren Radienvectoren mit dem Radiusvector des Punktes $(x_2, y_2, z_2)$ einen rechten Winkel bilden. Da aber alle diese Punkte auf einer Ebene liegen, welche senkrecht zu dem Radiusvector des Punktes $(x_2, y_2, z_2)$ ist und durch den Coordinatenanfangspunkt geht, so stellt die vorstehende, in $x$, $y$, $z$ lineare Gleichung, diese Ebene dar.

Will man $\sin v$ berechnen, so bedient man sich der bekannten Formel:

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$$

Man schreibt also:

$$\sin^2 v = 1 - (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)^2$$

oder da

$$(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) = 1$$

so darf man statt der auf der rechten Seite stehenden Einheit vorstehendes Produkt setzen, also schreiben:

$$\begin{aligned}\sin^2 v = {} & (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) - \\ & - (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)^2 = \\ = {} & (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1)^2 + (\cos\alpha_1 \cos\gamma_2 - \cos\alpha_2 \cos\gamma_1)^2 + \\ & + (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)\end{aligned}$$

wie man leicht findet. Ersetzt man in (5) die Cosinuse durch ihre aus (1) genommenen Werte, so erhält man $\sin v$ als Funktion der Coordinaten der gegebenen Punkte ausgedrückt wie folgt:

$$\sin v = \frac{\sqrt{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (6)$$

wo die Wurzeln im Zähler und Nenner wiederum ohne Vorzeichen zu nehmen sind.

Die Bestimmung des Winkels $v$, den zwei vom Coordinatenanfangspunkt aus nach zwei festen Punkten gezogene Strahlen miteinander bilden, geschieht auf graphischem Wege in folgender Weise: Man dreht (Fig. 29) die Ebene des Winkels $v$ so um den Coordinatenanfangspunkt, dafs der Radiusvector $\varrho_1$ (oder $\varrho_2$) eine seiner projicierenden Ebenen beschreibt und die Verbindungsgerade der Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ zu sich selbst parallel bleibt, bis $\varrho_1$ in eine Projectionsebene, z. B. in die erste Projectionsebene, zu liegen kommt. Dann bewegt sich $P_1'$ auf $\varrho_1'$ fort bis $p_1'$. Es ist dann $op_1' = \varrho_1$; dabei wird vorausgesetzt, dafs die wahre Länge von $\varrho_1$ nach (25) vorher bestimmt wurde. Die $z$ Coordinate des Punktes $P_2$ verkürzt sich durch diese Drehung um die $z$ Coordinate von

$P_1$. Die zweiten Projectionen $P_1''$ und $P_2''$ kommen also um $z_1$ tiefer zu liegen. Da ferner die Strecke $P_1 P_2$ parallel zu sich selbst und gleich bleibt, so ist dies auch mit ihrer ersten Projection $P_1' P_2'$ der Fall. Wenn also $P_1'$ nach $p_1'$ zu liegen kommt, so wird $p_2'$ die neue Lage von $P_2'$ und $p_1''$ und $p_2''$ werden die neuen Lagen von $P_1''$ und $P_2''$ sein.

Jetzt dreht man die Winkelebene um $\varrho_1 = op_1'$, bis sie mit der ersten Projectionsebene zusammenfällt, dann beschreibt der Punkt $p_2$ einen Kreis, dessen Radius senkrecht auf $\varrho_1'$ steht und gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete $z_2 - z_1$ und dessen andere das Perpendikel $pp_2'$ ist. Es ist also, wenn man mit $pq$ als Radius um $p$ einen Kreis beschreibt, $\pi$ die Lage des Punktes $P_2$ nach der Umlegung, und somit $v$ die Gröfse des gesuchten Winkels.

## 34.

**Inhalt des Dreiecks, welches vom Coordinatenanfangspunkt und von den beiden vorigen Punkten gebildet wird.** Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist der Inhalt $\triangle$ des von den Radienvectoren $\varrho$ und $\varrho'$, und der Strecke $l$ gebildeten Dreiecks:

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, \varrho' \sin v$$

woraus folgt:

$$\sin v = \frac{2\,\triangle}{\varrho\, \varrho'}$$

Es stellt somit der Zähler in (**33.**6) den doppelten Inhalt des gesuchten Dreiecks dar, wie eine Vergleichung des so eben für $\sin v$ gefundenen Ausdrucks mit jenem lehrt. Es kann dies noch wie folgt nachgewiesen werden.

Projiciert man nämlich das Dreieck $\triangle$ auf die Coordinatenebenen und bezeichnet die Inhalte der Projectionsdreiecke durch $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, so hat man, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Neigungswinkel der Dreiecksebene gegen die Projectionsebenen sind:

$$\triangle \cos\gamma = \triangle_1 \qquad \triangle \cos\beta = \triangle_2 \qquad \triangle \cos\alpha = \triangle_3$$

Quadriert und addiert man diese drei Formeln, so ergibt sich wegen (**25.**3):

$$\triangle^2 = \triangle_1^{\,2} + \triangle_2^{\,2} + \triangle_3^{\,2}$$

Da aber ist:

$$\begin{aligned} 2\,\triangle_1 &= x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \\ 2\,\triangle_2 &= x_1\,z_2 - x_2\,z_1 \quad \ldots\ldots \quad (1) \\ 2\,\triangle_3 &= y_1\,z_2 - y_2\,z_1 \end{aligned}$$

so ist:

$$2\,\triangle = \sqrt{(x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 + (x_1\,z_2 - x_2\,z_1)^2 + (y_1\,z_2 - y_2\,z_1)^2} \quad (2)$$

wie vorhin.

Die Ermittelung der Dreiecksfläche auf graphischem Wege ist in der graphischen Bestimmung des Winkels $v$, wie sie in der vorigen Nummer gegeben wurde, enthalten.

## 35.

**Inhalt und Winkel eines Dreiecks als Function der Coordinaten seiner Eckpunkte.** Die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks seien beziehungsweise: $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$.

Bezeichnet man wie oben mit $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ die Projectionen des Raumdreiecks auf die Coordinatenebenen der $xy$, $xz$ und $yz$, und mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche das vom Coordinatenanfang auf das Raumdreieck gefällte Perpendikel mit den Axen der $x$, $y$ und $z$ bildet, dann ist wie in der vorigen Nummer:

$$\triangle_3 = \triangle \cos\alpha \qquad \triangle_2 = \triangle \cos\beta \qquad \triangle_1 = \triangle \cos\gamma \qquad (1)$$

Nun ist aber, wie unten gezeigt werden wird:

$$2\,\triangle_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2\,\triangle_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2\,\triangle_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Quadriert und addiert man die (1), so ergibt sich in Rücksicht auf (**25.**5) als der gesuchte Inhalt $\triangle$ des Raumdreiecks:

$$2\triangle = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Um die Winkel des Dreiecks zu bestimmen, erinnere man sich, dafs nach (**26.**5) ist:

$$\cos\alpha_3 = \frac{x_2 - x_1}{s_3} \quad \cos\alpha_1 = \frac{x_3 - x_2}{s_1} \quad \cos\alpha_2 = \frac{x_1 - x_3}{s_2}$$

$$\cos\beta_3 = \frac{y_2 - y_1}{s_3} \quad \cos\beta_1 = \frac{y_3 - y_2}{s_1} \quad \cos\beta_2 = \frac{y_1 - y_3}{s_2} \qquad (4)$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{z_2 - z_1}{s_3} \quad \cos\gamma_1 = \frac{z_3 - z_2}{s_1} \quad \cos\gamma_2 = \frac{z_1 - z_3}{s_2}$$

wenn $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Winkel sind, welche beziehungsweise die Seiten $s_1, s_2, s_3$ des Raumdreiecks mit den Axen bilden. Beachtet muss hier wieder werden, was in (**26**) über das Vorzeichen von $\cos\gamma$ gesagt wurde.

Sind nun $v_3, v_2, v_1$ die beziehungsweise von den Seiten $s_1$ und $s_2$, $s_1$ und $s_3$, $s_3$ und $s_2$ eingeschlossenen Winkel, dann ergeben sich durch Einsetzen der Werte (4) in (**33.**2) die drei Formeln:

$$\cos v_3 = \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_3 - y_2) + (z_1 - z_3)(z_3 - z_2)}{s_1\ s_2}$$

$$\cos v_2 = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_2)}{s_1\ s_3}$$

$$\cos v_1 = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_1 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)}{s_2\ s_3}$$

Bildet man aus den linken Seiten von (4) die Determinante:

$$M = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1, & \cos\beta_2, & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und aus den rechten Seiten die Determinante:

$$D' = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & x_3 - x_2, & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1, & y_3 - y_2, & y_1 - y_3 \\ z_2 - z_1, & z_3 - z_2, & z_1 - z_3 \end{vmatrix} : s_1\ s_2\ s_3$$

so sind offenbar beide Determinanten einander gleich. Man erkennt ferner sofort, dafs wenn in $D'$ die zwei letzten Vertikalreihen zur ersten addiert werden, sämtliche Elemente der letzteren Null werden und folglich die Determinante verschwindet. Es mufs also auch $M = o$ sein. Somit hat man den Satz:

Liegen drei Gerade in einer Ebene, so findet zwischen den Cosinusen der Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bilden, die Relation statt:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1, & \cos\beta_2, & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = o \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Bedingungsgleichung ist selbstverständlich auch dann noch erfüllt, wenn die Geraden parallel zu sich selbst im Raume verschoben werden. Man kann dies als Satz so ausdrücken:

Besteht zwischen den Cosinusen der Winkel dreier Geraden mit den Coordinatenaxen die Relation (6), so liegen die drei Geraden, welche durch einen beliebigen Punkt parallel den gegebenen gezogen werden, in einer Ebene.

Unter Anwendung des Multiplikationsteorems für Determinanten hat man in Rücksicht auf (**25.**3) und (**33.**2) noch die bemerkenswerte Form des Quadrates von $M$:

$$M^2 = \begin{vmatrix} 1 & , & \cos(s_1\ s_2), & \cos(s_1\ s_3) \\ \cos(s_1\ s_2), & & 1 & , & \cos(s_2\ s_3) \\ \cos(s_1\ s_3), & & \cos(s_2\ s_3), & & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (7)$$

Um die wahre Gröfse eines Raumdreiecks, dessen Projectionen gegeben sind, zu bestimmen, verfährt man ähnlich wie bei Bestimmung des Winkels zweier Geraden. Man dreht das Dreieck um den einen Endpunkt $(x_1, y_1, z_1)$ so, dafs die diesem gegenüberliegende Seite $s_1$ parallel zu sich selbst bleibt und die Seite $s_3$ (oder $s_2$) ihre projicierende Ebene nicht ändert, so lange bis sie endlich parallel zu der zugehörigen Projectionsebene ist etc., wie in (**33**). Man könnte auch nach (**26**) die wahren Längen der Seiten des Dreiecks bestimmen, und dasselbe darnach construieren.

Um die Richtigkeit der Formeln (1) und (2) darzuthun, mufs zunächst daran erinnert werden, dafs unter der Projection eines Dreiecks oder einer beliebigen ebenen Figur auf irgend eine Ebene der Teil dieser Ebene zu verstehen ist, welcher von der Projection des Umfangs der Figur eingeschlossen wird. Um also die Projectionen des Dreiecks $\triangle$ mit den Ecken 1, 2, 3 auf die drei Coordinatenebenen zu erhalten, hat man die Ecken auf jede derselben zu projicieren und die Projectionen durch Gerade miteinander zu verbinden.

Fällt man jetzt von den Eckpunkten 1', 2', 3' des Dreiecks $\triangle_1$ die Lote auf die $x$Axe, dann ist, wenn das von 2' aus gefällte Lot zwischen die von 1' und 3' aus gefällten Lote zu liegen kommt (Fig. 30):

$$\triangle_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_1 y_3 - x_3 y_1)\right\}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber der ersten der Determinanten (2) gleich. $\triangle_2$ und $\triangle_3$ werden auf gleiche Weise berechnet.

Die Ebene des Dreiecks $\triangle$ schneidet die $xy$Ebene in einer Geraden. Fällt man von den Punkten 1, 2, 3 und ihren Projectionen 1', 2', 3' Lote auf diese Gerade, nämlich $p_1$, $p_2$, $p_3$ in der Ebene des Dreiecks $\triangle$ und $p_1'$, $p_2'$, $p_3'$ in der $xy$Ebene, dann hat man (Fig. 31):

$$p_1' = p_1 \cos\mu \qquad p_2' = p_2 \cos\mu \qquad p_3' = p_3 \cos\mu \quad . \quad (8)$$

wenn $\mu$ den Neigungswinkel der Dreiecksebene $\triangle$ gegen die $xy$Ebene, also den Winkel bezeichnet, welchen die Lote $p_\varkappa$ und $p_\varkappa'$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) miteinander bilden. Folgen sich diese Lote in der Reihenfolge 1, 2, 3 und sind $a$, $b$, $c$ die Abstände der gemeinschaftlichen Fufspunkte derselben, so hat man als Inhalt der beiden Dreiecke $\triangle$ und $\triangle_1$:

$$\triangle = \frac{p_1 + p_2}{2}a + \frac{p_2 + p_3}{2}b - \frac{p_1 + p_3}{2}c$$

$$\triangle_1 = \frac{p_1' + p_2'}{2}a + \frac{p_2' + p_3'}{2}b - \frac{p_1' + p_3'}{2}c$$

woraus durch Vergleichung, nachdem man in dem Ausdrucke für $\triangle_1$ die Substitutionen (8) vollzogen hat, folgt:

$$\triangle_1 = \triangle \cos\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Nun ist aber $\mu = \gamma$; also hat man:

$$\triangle_1 = \triangle \cos\gamma$$

wodurch die Richtigkeit der dritten der Formeln (1) bestätigt ist. Auf gleiche Weise beweist man die Richtigkeit der beiden andern.

Eine weitere Dunkelheit, welche in dieser und der vorigen Nummer noch geblieben ist, bezieht sich auf das Vorzeichen des Quadratwurzelausdrucks für den Inhalt eines Raumdreiecks. Dieselbe soll in der folgenden Nummer aufgehellt werden.

## 36.

**Zeichen eines Dreiecks.** Die Ausdrücke (**34.**$_1$) und die Determinanten auf den rechten Seiten der Formeln (**35.**$_2$) ändern das Zeichen durch Vertauschung zweier Indices. Diesem Zeichenwechsel steht der Wechsel des Vorzeichens von $\triangle_1$ in (**35.**$_9$) an der Seite, wenn statt des Winkels $\mu$ sein Nebenwinkel $180^0 - \mu$ als Neigungswinkel beider Ebenen gewählt wird. Um nun die geometrische Bedeutung dieses Zeichenwechsels feststellen zu können, ist es erforderlich, die bereits in (**4**) gemachte Unterscheidung der Seiten einer Ebene zur Geltung zu bringen. Die positive oder Vorderseite der $xy$ Ebene ist durch die positive $z$ Axe angedeutet. Damit ist dann zugleich der positive Sinn der Rotation der $xy$ Ebene in sich festgestellt, also auch der Sinn, in dem der Perimeter des Dreiecks zu durchlaufen ist bei Bildung der Determinanten (**35.**$_2$). Da nun nach (**8**) der Sinn einer Strecke durch Projection sich nicht ändert, so mufs auch der Perimeter des Dreiecks $\triangle$ in dem mit $\triangle_1$ übereinstimmenden Sinne durchlaufen werden, wodurch die positive Seite des ersteren festgelegt ist nach (**4**).

Wenn man also jetzt umgekehrt auf der Ebene des Dreiecks $\triangle$ ein Lot errichtet, so wird damit dem Perimeter ein bestimmter

Sinn beigelegt und die zu projicierende Seite der Dreiecksebene fixiert. Das Lot werde so errichtet, dafs der Sinn des Perimeters durch die Aufeinanderfolge der Ziffern 1, 2, 3 angedeutet sei (Fig. 11). Projiciert man nun das Dreieck auf die Vorderseite der $xy$ Ebene, so mufs der Perimeter der Projection in demselben Sinne wie bei der Originalfigur, also im Sinne 1', 2', 3', genommen werden. Da nun durch die Festlegung des Coordinatensystems die Vorderseite der $xy$ Ebene von vornherein ein für allemal durch die positive $z$ Axe fixiert ist, so wird der Sinn des Perimeters des Dreiecks $\triangle_1$ mit dem Sinne der Rotation der $xy$ Ebene in sich übereinstimmen oder nicht. Im ersteren Falle ist der Inhalt des Dreiecks $\triangle_1$ positiv, im zweiten Falle negativ zu nehmen. Wenn also das Lot auf die Dreiecksebene $\triangle$ im Sinne der positiven $z$ Axe errichtet ist, so stimmt der Sinn 1', 2', 3' mit dem positiven Drehsinne der $xy$ Ebene um die $z$ Axe überein und $\triangle_1$ ist demnach positiv. Ist dagegen das genannte Lot im entgegengesetzten Sinne errichtet, so ist der Sinn 1', 2', 3' dem Drehsinne der $xy$ Ebene in sich entgegengesetzt und $\triangle_1$ wird negativ.

Im ersteren Falle ist die projicierte Dreiecksseite der Vorderseite der $xy$ Ebene abgewendet, im zweiten Falle ist sie ihr zugewendet.

Man hat daher den Satz:

> Die Projection eines Dreiecks auf die Vorderseite der $xy$ Ebene ist positiv oder negativ, je nachdem die projicierte Seite der Ebene des Dreiecks der Vorderseite der $xy$ Ebene ab- oder zugewendet ist.

Macht man sich klar, dafs eine Flächenseite einer andern Flächenseite zugewendet ist, wenn beim Übergange von der einen zur andern, mittelst Durchschreitens des zwischenliegenden Raumes, sei es durch das Endliche oder Unendliche, keine andere Seite der beiden Flächen überschritten wird, so gilt der so eben ausgesprochene Satz auch dann noch, wenn das Dreieck $\triangle$ sich unterhalb der $xy$ Ebene befindet. Man erkennt auch ohne Mühe, dafs die Normalen von zwei einander abgewendeten Flächenseiten

einen spitzen Winkel bilden, während derselbe stumpf ist bei den Normalen von zwei Flächen, die einander zugewendet sind.

Der Beweis vorstehenden Satzes für die beiden andern Coordinatenebenen wird in gleicher Weise geführt. Dabei ist zu bemerken, dafs die Vorderseite der $xz$ Ebene durch die positive Halbaxe der $y$ und die Vorderseite der $yz$ Ebene durch die positive Halbaxe der $x$ bestimmt ist, und dafs alle orthogonalen Projectionen auf diese Vorderseiten zu machen sind. Letzteres ist eine Consequenz der in (**16**) getroffenen Winkelbestimmung.

Um noch den Einflufs zu untersuchen, den die Vorzeichen der Projectionsdreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ auf das Vorzeichen von $\triangle$ haben, betrachten wir zunächst das letztere als im ersten Oktanten gelegen. In diesem kann es acht verschiedene Lagen haben, entsprechend den acht verschiedenen Kombinationen der Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ seines Lotes mit den Axen, wie sie in (**16**) aufgestellt wurden. Zieht man nämlich durch den Coordinatenanfang einen Parallelstrahl mit dem Lote, so wird derselbe je nach der Stellung von $\triangle$ in jedem der acht Oktanten verlaufen können. Die vier ersten dieser Kombinationen liefern Stellungen der Dreiecksebene, bei welchen die zu projicierende Seite derselben der Vorderseite der $xy$ Ebene abgewendet ist, in den vier andern ist sie der Vorderseite zugewendet. Greifen wir eine dieser Stellungen heraus, so müfste, die Kombinationen I und VIII der Tabelle in (**16**) ausgenommen, das Dreieck $\triangle$ im Raume gleichzeitig zwei verschiedene Vorzeichen erhalten, wenn es gestattet wäre, auch in dem vorliegenden Falle die Vorzeichen seiner Projectionen auf dasselbe zu übertragen, wie es eingangs dieser Nummer in einem besonderen Falle geschehen ist. Das ist unmöglich, und deshalb würden die Quadratwurzelausdrücke für $\triangle$ in den beiden vorigen Nummern als reine Zahlen zu behandeln sein, wenn wir nicht in (**16**) der $xy$ Ebene einen gewissen Vorzug vor den andern Coordinatenebenen eingeräumt hätten. Wenn wir also in ($\mathbf{34}_{.2}$) oder in ($\mathbf{35}_{.3}$) dem Quadratwurzelausdruck für $2\triangle$ das Vorzeichen $+$ geben, so wollen wir damit andeuten, dafs, dem vorhin aufgestellten Satze entsprechend, die projicierte Dreiecksseite der Vorderseite der $xy$ Ebene abgewendet und im entgegengesetzten Falle ihr zugewendet ist.

Ist bei der Projection keine bestimmte Seite des Dreiecks ins Auge gefafst worden, dann sind die Quadratwurzeln als reine Zahlen zu behandeln.

## 37.

**Aequipollente Strecken. Die Koppel.** Es seien

$$\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \xi_2 - \xi_1 & \eta_2 - \eta_1 & \zeta_2 - \zeta_1 \end{matrix} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die orthogonalen Projectionen, oder wie man sich noch kürzer ausdrückt, die Coordinaten zweier Strecken im Raume. Dabei werde vorausgesetzt, dass die untereinander stehenden Coordinaten das gleiche Vorzeichen haben. Aus (**26**) ergibt sich dann, dafs die beiden Raumstrecken einander gleich und parallel sind und den gleichen Sinn haben, wenn die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \xi_2 - \xi_1 \\ y_2 - y_1 &= \eta_2 - \eta_1 \\ z_2 - z_1 &= \zeta_2 - \zeta_1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Zwei einander gleiche, parallele und in gleichem Sinne genommene Strecken nennt man aequipollent (Fig. 32).

Die (2) lassen sich noch auf folgende Arten schreiben:

$$\begin{aligned} x_2 - \xi_2 &= x_1 - \xi_1 \\ y_2 - \eta_2 &= y_1 - \eta_1 \\ z_2 - \zeta_2 &= z_1 - \zeta_1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

daher der Satz:

> Verbindet man die entsprechenden Endpunkte zweier äquipollenter Strecken, so erhält man ebenfalls zwei äquipollente Strecken.

Sind die Vorzeichen der Coordinaten (1) der beiden Raumstrecken entgegengesetzt, bestehen also die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -(\xi_2 - \xi_1) \\ y_2 - y_1 &= -(\eta_2 - \eta_1) \\ z_2 - z_1 &= -(\zeta_2 - \zeta_1) \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

dann sind die Raumstrecken ebenfalls gleich und parallel, aber sie sind im entgegengesetzten Sinne genommen. Man nennt zwei solche Strecken ein Streckenpaar oder eine Koppel (Fig. 33).

Die (4) lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} x_2 - \xi_1 &= x_1 - \xi_2 \\ y_2 - \eta_1 &= y_1 - \eta_2 \\ z_2 - \zeta_1 &= z_1 - \zeta_2 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und geben in dieser Form den Satz:

> Verbindet man die Anfangspunkte mit den Endpunkten einer Koppel, so erhält man eine zweite Koppel.

Schreibt man endlich die (4) wie folgt:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1) + (\xi_2 - \xi_1) &= o \\ (y_2 - y_1) + (\eta_2 - \eta_1) &= o \\ (z_2 - z_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) &= o \end{aligned}$$

so lassen sich dieselben in den Satz einkleiden:

> Die Projection einer Koppel auf eine jede der drei Coordinatenaxen ist Null.

## 38.

**Resultante zweier Strecken. Kräftepolygon.** Die Coordinaten $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ einer Strecke können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (x_2 - a) + (a - x_1) \\ y_2 - y_1 &= (y_2 - b) + (b - y_1) \\ z_2 - z_1 &= (z_2 - c) + (c - z_1) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $a$, $b$, $c$ beliebige Zahlen, insbesondere die Coordinaten eines Punktes 0, bedeuten. Im letzteren Falle stellen die rechten Seiten dieser Formeln die Summen der Coordinaten der Strecken dar, die durch den willkührlichen Punkt $(a, b, c)$ und durch die Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ bestimmt sind.

Der Sinn der Strecken ist nach (26) dem Sinne der gegebenen Strecke entgegengesetzt rücksichtlich der Rotation der Ebene 0, 1, 2 in sich selbst. Finden nun weiter die Beziehungen statt:

$$x_2 - a = \xi_2 - \alpha \qquad a - x_1 = \alpha_1 - \xi_1$$
$$y_2 - b = \eta_2 - \beta \qquad b - y_1 = \beta_1 - \eta_1$$
$$z_2 - c = \zeta_2 - \gamma \qquad c - z_1 = \gamma_1 - \zeta_1$$

sind also die beliebig im Raume gelegenen Strecken mit den Coordinaten $\xi_2 - \alpha$, $\eta_2 - \beta$, $\zeta_2 - \gamma$ und $\alpha_1 - \xi_1$, $\beta_1 - \eta_1$, $\gamma_1 - \zeta_1$ beziehungsweise äquipollent den Strecken mit den Coordinaten $x_2 - a$, $y_2 - b$, $z_2 - c$ und $a - x_1$, $b - y_1$, $c - z_1$ so hat man zufolge (1):

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (\xi_2 - \alpha) + (\alpha_1 - \xi_1) \\ y_2 - y_1 &= (\eta_2 - \beta) + (\beta_1 - \eta_1) \\ z_2 - z_1 &= (\zeta_2 - \gamma) + (\gamma_1 - \zeta_1) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn also jetzt zwei beliebige Strecken im Raume gegeben sind, so kann man immer eine Strecke finden, deren Coordinaten der Summe der Coordinaten der beiden Strecken gleich sind. Zu diesem Zwecke ziehe man durch einen beliebigen Punkt $(a, b, c)$ des Raumes zwei mit den gegebenen Strecken äquipollente Strecken und schliesse das Dreieck. Die Schlufslinie, im entgegengesetzten Sinne genommen, ist die gesuchte Strecke. Sämtliche mit der Schlufslinie äquipollente Strecken sind ebenfalls Lösungen.

Eine Strecke, deren Coordinaten der Summe der Coordinaten zweier gegebener Strecken gleich sind, nennt man die geometrische Resultante der beiden Strecken.

Durch wiederholte Anwendung des so eben angegebenen Verfahrens gelingt es die Resultante einer beliebigen Anzahl von Strecken im Raume zu finden. Es entspringt daraus folgende Regel:

> Um die Resultante von $n$ Strecken im Raume zu finden, zeichnet man ein Polygon, dessen Seiten den gegebenen Strecken äquipollent sind. Die Schlufslinie dieses Polygons, im entgegengesetzten Sinne genommen, ist die Resultante der $n$ Strecken.

Dafs die Resultante unabhängig ist von der Aufeinanderfolge der Strecken des Polygons ergibt sich daraus, dafs eine Summe durch Vertauschung der Glieder sich nicht ändert. Sind nämlich

$$\begin{array}{llllll} x_1 - x_2, & x_3 - x_4, & x_5 - x_6, & x_7 - x_8, & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_{2n-1} - x_{2n} \\ y_1 - y_2, & y_3 - y_4, & y_5 - y_6, & y_7 - y_8, & \cdot\ \cdot\ \cdot & y_{2n-1} - y_{2n} \\ z_1 - z_2, & z_3 - z_4, & z_5 - z_6, & z_7 - z_8, & \cdot\ \cdot\ \cdot & z_{2n-1} - z_{2n} \end{array}$$

die Coordinaten von $n$ ganz beliebig gelegenen Raumstrecken, und

$$\begin{array}{llllll} \xi_1 - \xi_2, & \xi_2 - \xi_3, & \xi_3 - \xi_4, & \xi_4 - \xi_5, & \cdot\ \cdot\ \cdot & \xi_n - \xi_{n+1} \\ \eta_1 - \eta_2, & \eta_2 - \eta_3, & \eta_3 - \eta_4, & \eta_4 - \eta_5, & \cdot\ \cdot\ \cdot & \eta_n - \eta_{n+1} \\ \zeta_1 - \zeta_2, & \zeta_2 - \zeta_3, & \zeta_3 - \zeta_4, & \zeta_4 - \zeta_5, & \cdot\ \cdot\ \cdot & \zeta_n - \zeta_{n+1} \end{array}$$

die Coordinaten der ihnen äquipollenten Polygonseiten, ist also

$$\begin{array}{ll} \xi_1 - \xi_2 = x_1 - x_2 & \xi_2 - \xi_3 = x_3 - x_4 \\ \eta_1 - \eta_2 = y_1 - y_2 & \eta_2 - \eta_3 = y_3 - y_4 \quad \text{u. s. w.} \quad (3) \\ \zeta_1 - \zeta_2 = z_1 - z_2 & \zeta_2 - \zeta_3 = z_3 - z_4 \end{array}$$

dann sind nach dem so eben ausgesprochenen Satze die Coordinaten der Resultante:

$$\begin{array}{l} (\xi_1 - \xi_2) + (\xi_2 - \xi_3) + (\xi_3 - \xi_4) + \ldots + (\xi_n - \xi_{n+1}) = \xi_1 - \xi_{n+1} \\ (\eta_1 - \eta_2) + (\eta_2 - \eta_3) + (\eta_3 - \eta_4) + \ldots + (\eta_n - \eta_{n+1}) = \eta_1 - \eta_{n+1} \quad (4) \\ (\zeta_1 - \zeta_2) + (\zeta_2 - \zeta_3) + (\zeta_3 - \zeta_4) + \ldots + (\zeta_n - \zeta_{n+1}) = \zeta_1 - \zeta_{n+1} \end{array}$$

oder wegen (3):

$$\begin{array}{l} \xi_1 - \xi_{n+1} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + (x_5 - x_6) + \ldots + (x_{2n-1} - x_{2n}) \\ \eta_1 - \eta_{n+1} = (y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) + (y_5 - y_6) + \ldots + (y_{2n-1} - y_{2n}) \quad (5) \\ \zeta_1 - \zeta_{n+1} = (z_1 - z_2) + (z_3 - z_4) + (z_5 - z_6) + \ldots + (z_{2n-1} - z_{2n}) \end{array}$$

Vertauscht man die Summanden auf den rechten Seiten dieser Formeln, so bleiben die betreffenden Summen unverändert und damit auch die Coordinaten der Resultante. Der Vertauschung der Summanden in (5) entspricht aber eine andere Aneinanderreihung der Polygonseiten. Es sei also jetzt:

$$\begin{array}{l} \xi_1 - \xi_{n+1} = (x_{k-1} - x_k) + (x_5 - x_6) + (x_1 - x_2) + \ldots + (x_3 - x_4) \\ \eta_1 - \eta_{n+1} = (y_{k-1} - y_k) + (y_5 - y_6) + (y_1 - y_2) + \ldots + (y_3 - y_4) \quad (6) \\ \zeta_1 - \zeta_{n+1} = (z_{k-1} - z_k) + (z_5 - z_6) + (z_1 - z_2) + \ldots + (z_3 - z_4) \end{array}$$

eine andere, durch Vertauschung der Summanden erhaltene Form der Coordinaten der Resultante und

$$\begin{array}{ll} \xi'_{k-1} - \xi'_k = x_{k-1} - x_k & \xi'_k - \xi'_{k+1} = x_5 - x_6 \\ \eta'_{k-1} - \eta'_k = y_{k-1} - y_k & \eta'_k - \eta'_{k+1} = y_5 - y_6 \quad \text{u. s. w.} \\ \zeta'_{k-1} - \zeta'_k = z_{k-1} - z_k & \zeta'_k - \zeta'_{k+1} = z_5 - z_6 \quad \ldots \quad (7) \end{array}$$

die den Strecken aequipollenten Polygon-Seiten; dann ist die Schlufslinie dieses Polygons gegeben durch:

$$(\xi'_{k-1} - \xi'_k) + (\xi'_k - \xi'_{k+1}) + \cdots + (\xi'_m - \xi'_{m+1}) = \xi'_{k-1} - \xi'_{m+1}$$

u. s. w.

Es muss aber nach (6) und (7) notwendig

$$\xi'_{k-1} - \xi'_{m+1} = \xi_1 - \xi_{n+1}$$
$$\eta'_{k-1} - \eta'_{m+1} = \eta_1 - \eta_{n+1}$$
$$\zeta'_{k-1} - \zeta'_{m+1} = \zeta_1 - \zeta_{n+1}$$

sein, mit andern Worten die Schlufslinien beider Polygone haben gleiche Gröfse und Richtung. Sie stimmen auch noch der Lage nach überein, wenn der Punkt $(\xi'_{k-1}, \eta'_{k-1}, \zeta'_{k-1})$ mit dem Punkte $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ zusammenfällt; denn dann fällt zufolge vorstehender Relationen auch der Punkt $(\xi'_{m+1}, \eta'_{m+1}, \zeta'_{m+1})$ mit dem Punkte $(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \zeta_{n+1})$ zusammen.

Das ungeschlossene Polygon, welches durch Aneinanderreihung von $n$ Strecken entsteht, die $n$ gegebenen Strecken äquipollent sind, bei willkührlicher Wahl des Anfangspunktes, spielt in der graphischen Statik eine grofse Rolle. Man nennt dasselbe das Kräftepolygon. Der Name rührt daher, dafs jede Strecke eine Zug- oder Druckkraft darstellt, wenn die letzteren mit dem durch die Schwere hervorgerufenen Zug oder Druck verglichen werden und man die Gewichtseinheit durch die Längenheit der Strecke, Richtung, Angriffspunkt und Sinn der Kraft durch diese Elemente der Strecke repräsentiert denkt. Der letzte Grund für die Richtigkeit der Lehrsätze der Statik ist also der, dafs, weil die Bestimmungsstücke einer Zug- oder Druckkraft identisch sind mit den Bestimmungsstücken einer Strecke, jedes System von Zug- oder Druckkräften durch ein System von Strecken dargestellt werden kann, dessen geometrische Eigenschaften dann ohne weiteres auf das erstere übertragen werden können.

## 39.

**Componenten einer Strecke. Seilpolygon.** Die Formeln (1) und (2) in der vorigen Nummer können aber auch umgekehrt dahin gedeutet werden, dafs man jede Strecke durch zwei andere, ihre

Componenten, ersetzen kann. Man kann also auch $n$ beliebig im Raume gelegene Strecken durch zwei Strecken ersetzen. Denn construiert man mit Hilfe des Kräftepolygons die Resultante der $n$ Strecken und zerlegt dieselbe in zwei Componenten, so ist die Aufgabe gelöst. Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn man das Kräftepolygon zeichnet und einen beliebigen Punkt $(a, b, c)$, den Pol des Kräftepolygons, mit den Ecken desselben verbindet. Bezeichnet man die Ecken des Kräftepolygons mit $1, 2, 3, 4 \ldots n$ und den Pol mit 0, dann hat man

$$\begin{aligned}
\xi_2 - \xi_1 &= (\xi_0 - \xi_1) + (\xi_2 - \xi_0) \\
\xi_3 - \xi_2 &= (\xi_0 - \xi_2) + (\xi_3 - \xi_0) \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\
\xi_4 - \xi_3 &= (\xi_0 - \xi_3) + (\xi_4 - \xi_0) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\
\xi_n - \xi_{n-1} &= (\xi_0 - \xi_{n-1}) + (\xi_n - \xi_0)
\end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich

$$\xi_n - \xi_1 = (\xi_0 - \xi_1) + (\xi_n - \xi_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned}
\eta_n - \eta_1 &= (\eta_0 - \eta_1) + (\eta_n - \eta_0) \\
\zeta_n - \zeta_1 &= (\zeta_0 - \zeta_1) + (\zeta_n - \zeta_0) \quad . \quad . \quad . \quad (3)
\end{aligned}$$

Nun sind aber $\xi_n - \xi_1$, $\eta_n - \eta_1$, $\zeta_n - \zeta_1$ die Coordinaten der Resultante der $n$ Strecken und die Summanden auf den rechten Seiten von (2) und (3) die Coordinaten der Verbindungsstrecken $\overline{0\,1}$ und $\overline{n\,0}$. Die letzteren sind also die Componenten der Resultante und somit äquivalent dem System der gegebenen $n$ Strecken.

Nach (1) ist jede Verbindungsstrecke des Pols mit den Ecken des Polygons, mit Ausnahme der ersten und letzten, in doppeltem Sinne genommen. Denn ist $k$ eine Ecke des Polygons, so ist die Verbindungsstrecke des Pols mit ihr als Componente der Seite $\overline{k-1,\ k}$ im Sinne $\overline{0\,k}$ zu nehmen und als Componente der Seite $\overline{k,\ k+1}$ im Sinne $\overline{k,\ 0}$. Zeichnet man also jetzt ein Polygon, dessen Seiten den Componenten der Seiten des Kräftepolygons äquipollent sind, so erhält man ein ungeschlossenes Polygon, dessen Seiten mit Ausnahme der ersten und letzten, in doppeltem Sinne zu nehmen sind. Dieses Polygon kann nun das Kräftepolygon vertreten, wenn es sich darum handelt, die Resul-

tante von $n$ Strecken zu bestimmen. Man nennt es in der graphischen Statik das Seilpolygon. Es führt insbesondere diesen Namen, wenn seine Ecken in den gegebenen Strecken oder deren Verlängerungen liegen. Damit dies möglich sei, müssen die Polygondoppelseiten auseinandergezogen werden.

Wenn sich das Kräftepolygon schliefst, dann ist die Resultante Null. Da dann auch die Strecken $\overline{0\,1}$ und $\overline{n\,0}$ zusammenfallen, so wird sich im Allgemeinen auch das Seilpolygon schliefsen, oder die erste und letzte Seite desselben werden eine Koppel bilden, zwei Fälle, die in der graphischen Statik von besonderer Wichtigkeit sind.

## 40.

**Projection des Umfangs eines Dreiecks auf die Coordinatenaxen.** Es seien $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$, $(x_3\ y_3\ z_3)$ die Eckpunkte des Dreiecks, welche kurz mit 1, 2, 3 bezeichnet werden mögen. Der Umfang des Dreiecks werde in dem Sinne 1, 2, 3 durchlaufen. Die Projectionen der Seiten des Dreiecks auf die Axen haben denselben Sinn, wie die Seiten, und folglich geben die Ausdrücke:

$$\begin{array}{l}(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_1 - x_3)\\ (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_1 - y_3)\\ (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + (z_1 - z_3)\end{array} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Projectionen des Umfangs des Dreiecks auf die Coordinatenaxen. Da dieselben identisch verschwinden, so hat man den Satz:

> Projiciert man den im bestimmten Sinne genommenen Umfang eines Dreiecks auf die Coordinatenaxen, so ist jede dieser Projectionen gleich Null.

Bezeichnen $s_1$, $s_2$, $s_3$ die Seiten des Dreiecks und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ die Winkel desselben mit den Axen, dann ist nach **(26)**:

$$s_1 \cos\alpha_1 = x_3 - x_2 \quad s_1 \cos\beta_1 = y_3 - y_2 \quad s_1 \cos\gamma_1 = z_3 - z_2$$
$$s_2 \cos\alpha_2 = x_1 - x_3 \quad s_2 \cos\beta_2 = y_1 - y_3 \quad s_2 \cos\gamma_2 = z_1 - z_3$$
$$s_3 \cos\alpha_3 = x_2 - x_1 \quad s_1 \cos\beta_3 = y_2 - y_1 \quad s_3 \cos\gamma_3 = z_2 - z_1$$

Durch Addition der untereinander stehenden Formeln ergeben sich unter Berücksichtigung von (1) die Identitäten:

$$\begin{aligned} s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_3 &\equiv o \\ s_1 \cos\beta_1 + s_2 \cos\beta_2 + s_3 \cos\beta_3 &\equiv o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \\ s_1 \cos\gamma_1 + s_2 \cos\gamma_2 + s_3 \cos\gamma_3 &\equiv o \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen lassen nun nicht mehr erkennen, dafs die Strecken $s_1$, $s_2$, $s_3$ die Seiten eines Dreiecks sind. Es können unter $s_1$, $s_2$, $s_3$ also auch drei beliebige Strecken im Raume, welche den Seiten eines Dreiecks äquipollent sind, verstanden werden. In diesem Falle kann aber die geometrische Bedeutung der (2) keine andere sein als vorhin. Man hat daher den Satz:

> Wenn drei beliebige, nach Gröfse, Richtung und Sinn gegebene, Strecken im Raume auf die Coordinatenaxen projiciert werden, und es bestehen die Identitäten (2), so erhält man durch stetige Aneinanderreihung dreier mit ihnen äquipollenten Strecken ein Dreieck.

## 41.

**Projection des Umfangs eines Dreiecks auf eine beliebige Raumgerade.** Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche eine beliebige Raumgerade $p$ mit den Coordinatenaxen macht, und multipliziert man die linken Seiten der Identitäten (**40.**$_2$) der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addiert die Produkte, so muss auch die so entstehende Summe:

$$\begin{aligned} &(s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_3) \cos\alpha + (s_1 \cos\beta_1 + s_2 \cos\beta_2 + \\ &+ s_3 \cos\beta_3) \cos\beta + (s_1 \cos\gamma_1 + s_2 \cos\gamma_2 + s_3 \cos\gamma_3) \cos\gamma \end{aligned}$$

identisch verschwinden, da jedes einzelne Glied identisch Null ist. Ordnet man daher vorstehenden Ausdruck nach $s_1$, $s_2$ und $s_3$, so hat man:

$$s_1 \cos(1\,p) + s_2 \cos(2\,p) + s_3 \cos(3\,p) \equiv o \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\ \cos\alpha_1 + \cos\beta\ \cos\beta_1 + \cos\gamma\ \cos\gamma_1 &= \cos(1\,p)\\
\cos\alpha\ \cos\alpha_2 + \cos\beta\ \cos\beta_2 + \cos\gamma\ \cos\gamma_2 &= \cos(2\,p)\\
\cos\alpha\ \cos\alpha_3 + \cos\beta\ \cos\beta_3 + \cos\gamma\ \cos\gamma_3 &= \cos(3\,p)
\end{aligned}$$

und also $(1\,p)$, $(2\,p)$, $(3\,p)$ die Winkel bezeichnen, welche die Strecken $s_1$, $s_2$, $s_3$ mit der Geraden $p$ bilden. Somit können wir jetzt obige Sätze allgemeiner wie folgt ausdrücken:

> Die Projection des im bestimmten Sinne genommenen Perimeters eines Dreiecks auf eine beliebige Gerade $p$ ist gleich Null, und wenn die Summe der Projectionen dreier Strecken im Raume auf eine beliebige Gerade $p$ verschwindet, dann kann aus drei mit ihnen aequipollenten Strecken durch continuierliche Aneinanderreihung derselben immer ein Dreieck gebildet werden.

Behufs eindeutiger Bestimmung der Winkel $(1\,p)$, $(2\,p)$, $(3\,p)$ hat man der Geraden $p$ einen bestimmten Sinn beizulegen. Für die conjugierte Gerade $p$ ändern sich dann lediglich die Vorzeichen der Glieder in (1).

Läfst man (Fig. 34) die Gerade $p$ nacheinander mit den Seiten $s_1$, $s_2$, $s_3$ des Dreiecks, dessen innere Winkel beziehungsweise $a_1$, $a_2$, $a_3$ seien, zusammenfallen, so ergeben sich die Fundamentalformeln der ebenen Trigonometrie:

$$\begin{aligned}
s_1 \cos a_3 + s_3 \cos a_1 &= s_2\\
s_2 \cos a_1 + s_1 \cos a_2 &= s_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)\\
s_3 \cos a_2 + s_2 \cos a_3 &= s_1
\end{aligned}$$

Diese Formeln gelten zufolge des oben ausgesprochenen Satzes auch dann noch, wenn $s_1$, $s_2$, $s_3$ drei beliebige, den Seiten eines Dreiecks aequipollente, Strecken im Raume sind. Man überzeugt sich aber leicht, dafs sie ihre Gültigkeit verlieren, wenn eine der Seiten des Dreiecks ihren Sinn ändert (Fig. 35).

Da die Formeln (2) Spezialfälle der Formel (1) sind, so läfst sich diese vermuthen, dafs diese Formel hinfällig wird, wenn

der Sinn einer Seite des Dreiecks mit dem Sinne des Perimeters, wie er durch die beiden andern Seiten bestimmt ist, nicht in Übereinstimmung ist. In der That ändert in diesem Falle das der betreffenden Seite entsprechende Glied in dem Ausdrucke auf der linken Seite von (1) das Vorzeichen, und dieser Ausdruck verschwindet daher nicht mehr identisch.

Es verdient noch ein weiterer Spezialfall, seiner Wichtigkeit wegen, hervorgehoben zu werden, nämlich der, wenn die drei Strecken $s_1$, $s_2$, $s_3$ auf ein und derselben Geraden $g$ liegen oder einander parallel sind. Die Summe ihrer Projectionen auf eine beliebige Gerade $p$ ist dann:

$$s_1 \cos(g\,p) + s_2 \cos(g\,p) + s_3 \cos(g\,p) = (s_1 + s_2 + s_3) \cos(g\,p)$$

Wenn der Sinn sämtlicher drei Strecken entweder übereinstimmt mit dem Sinn der Geraden $g$, oder ihm entgegengesetzt ist, so kann dieser Ausdruck nur verschwinden, wenn $\cos(g\,p) = o$ also $(g\,p) = 90^0$ ist. Ist dagegen der Sinn einer Strecke entgegengesetzt dem Sinne der beiden andern, so verschwindet vorstehender Ausdruck, wenn die Maßzahl jener Strecke gleich ist der Summe der Maßzahlen der beiden andern Strecken. Durch drei den gegebenen aequipollente Strecken läßt sich aber dann durch continuierliche Aneinanderreihung kein Dreieck im eigentlichen Sinne herstellen, da ein jeder Scheitel des Dreiecks in die Verbindungsgerade der beiden andern zu liegen kommt.

Sind $A$, $B$, $C$ die drei Scheitel, so hat man also:

$$AB + BC + CA \equiv o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und damit den wichtigen Satz:

> Wenn drei Punkte $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen, so besteht zwischen den drei durch sie begrenzten Strecken die Identität (3).

Die letztere läßt sich auch noch schreiben:

$$AB + BC \equiv -\,CA$$

oder da $-\,CA = AC$ ist:

$$AB + BC \equiv AC$$

In dieser Form geschrieben, bedeutet $AC$ die arithmetische Resultante der beiden Strecken $AB$ und $BC$, und man kann jetzt obigem Satze folgende, der Verallgemeinerung fähige, Fassung geben:

> Wenn die Summe dreier parallerer, oder in einer Geraden liegenden, Strecken identisch verschwindet, so ist eine jede dieser Strecken, im entgegengesetzten Sinne genommen, die **arithmetische** Resultante der beiden andern.

Die Verallgemeinerung des Satzes lautet:

> Wenn die Summe der Projectionen dreier Strecken auf eine beliebige Gerade identisch verschwindet, so ist eine jede dieser Strecken, im entgegengesetzten Sinne genommen, die **geometrische** Resultante der beiden andern.

Die hierin enthaltene Definition von der geometrischen Resultante zweier Strecken ist identisch mit der in (**38**) aufgestellten, und steht im Einklange mit dem gewöhnlichen oder arithmetischen Summenbegriff zweier Strecken; denn man kann aus drei Strecken, deren Projectionen auf eine beliebige Gerade identisch verschwinden, immer ein Dreieck herstellen. Für die Projection dieses letzteren gilt aber der Satz (3). Die Übertragung einer Eigenschaft der Projection auf die Originalfigur ist aber gerechtfertigt, wenn, wie im vorliegenden Falle, Widersprüche sich nicht ergeben. Man kann dies Alles in folgendem Satze zusammenfassen:

> Die Projection der geometrischen Resultante von drei oder mehreren Strecken auf eine Gerade ist gleich der arithmetischen Resultante der Projectionen dieser Strecken auf dieselbe Gerade.

## 42.

**Projection des Umfangs eines geschlossenen Polygons auf die Coordinatenaxen und auf eine beliebige Gerade.** Es seien die $n$ Eck-Punkte eines Raumpolygons durch ihre Coordinaten $x_k, y_k, z_k$ ($k = 1, 2, 3 \ldots n$) gegeben.

Projiciert man den Perimeter dieses Polygons auf die Coordinatenaxen, so ergeben sich für die Projectionen folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}&(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+(x_5-x_4)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+(x_1-x_n)\\&(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+(y_4-y_3)+(y_5-y_4)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+(y_1-y_n)\quad(1)\\&(z_2-z_1)+(z_3-z_2)+(z_4-z_3)+(z_5-z_4)+\ldots+(z_n-z_{n-1})+(z_1-z_n)\end{aligned}$$

oder wenn man die Polygonseiten mit $s_k$ ($k = 1, 2, 3 \ldots n$) und ihre Winkel mit den Coordinatenaxen durch $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ($k=1, 2, 3 \ldots n$) bezeichnet:

$$\sum^{n} s_k \cos\alpha_k\,, \qquad \sum^{n} s_k \cos\beta_k\,, \qquad \sum^{n} s_k \cos\gamma_k \quad . \quad . \quad (2)$$

wo das Summenzeichen $\sum^{n}$ sich auf den Jndex $k$ bezieht.

Hiebei sei als wesentlich vorausgesetzt, dafs sämtliche Seiten des Polygons in demselben Sinne genommen sind, nämlich in jenem Sinne, in welchem die Ecken des Polygons aufeinander folgen. Die Ausdrücke (1) und (2) sind identisch Null. An der Form der ersteren ist die Wahrheit dieser Behauptung augenscheinlich, während man der Form der letzteren die Identität mit Null nicht ansehen kann. Die Ausdrücke (2) tragen auch den Stempel ihrer Entstehung nicht an sich, wie die (1), sie könnten also ebenso gut herrühren von den Projectionen beliebiger im Raume gelegenen $n$ Strecken, sie könnten insbesondere die Projectionen von $n$ Strecken sein, welche alle denselben Anfangspunkt haben.

Daraus schliefsen wir, dafs zwischen der Figur, die gebildet wird von $n$ beliebig im Raume gelegenen Strecken, welche einzig und allein der Bedingung genügen müssen, dafs die Summe ihrer Projectionen auf jede der drei Coordinatenaxen identisch verschwindet, dann zwischen dem geschlossenen Polygon, dessen Seiten den gegebenen Strecken aequipollent sind, und endlich zwischen dem Bündel von Strecken, welches erhalten wird, wenn man von einem beliebigen Punkte des Raumes aus mit den gegebenen Strecken aequipollente Strecken zieht, eine enge Beziehung besteht, die sich in folgenden Doppelsatz einkleiden läfst:

> Wenn die Summe der Projectionen von $n$ beliebigen Strecken auf jede der drei Coordina-

tenaxen identisch verschwindet, so kann man durch stetige Aneinanderreihung von $n$ Strecken, welche den gegebenen aequipollent sind, ein geschlossenes Polygon herstellen

Es verdient ganz besonders hervorgehoben zu werden, dafs die Strecken in gleichem Sinne aneinandergereiht werden müssen. Ist dies nur bei einer einzigen nicht der Fall, dann finden die Identitäten

$$\sum^{n} s_k \cos \alpha_k = o \qquad \sum^{n} s_k \cos \beta_k = o \qquad \sum^{n} s_k \cos \gamma_k = o \quad . \quad (3)$$

nicht mehr statt. Denn ist $s_n$ diese Strecke, so sind nicht mehr $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ ihre Winkel mit den Coordinatenaxen, sondern $180+\alpha_n$, $180+\beta_n$. $180+\gamma_n$. Es erhalten daher $\cos \alpha_n$, $\cos \beta_n$, $\cos \gamma_n$ das entgegengesetzte Zeichen in den Ausdrücken (2); folglich können dieselben, wenn sie vorher Null waren, jetzt nicht mehr verschwinden.

Am klarsten erkennt man dies übrigens aus den Ausdrücken (1), deren identisches Verschwinden aufhört, sobald das Vorzeichen einer Differenz $(x_k - x_{k-1})$ sich ändert.

Eine leichte Überlegung zeigt, dafs, wenn aus $n$ Strecken ein geschlossenes Polygon soll gebildet werden können, dessen Seiten den Strecken aequipollent sind, der Sinn von $n-1$ Strecken ganz beliebig gewählt werden kann, dafs aber dann der Sinn der $n^{ten}$ Strecke bestimmt ist, als jener, in dem die Schlufslinie des aus den $n-1$ Strecken gebildeten ungeschlossenen Polygons durchlaufen werden mufs, damit das Polygon sich schliefse.

Hebt man aus den drei Identitäten (1) drei demselben Punktepaare zugehörigen Differenzen $x_k - x_{k-1}$, $y_k - y_{k-1}$, $z_k - z_{k-1}$ heraus, so haben die zurückbleibenden Summen die entgegengesetzten Werte dieser Differenzen. Sind also $d_1$, $d_2$, $d_3$ diese letzteren, so hat man:

$$x_k - x_{k-1} = d_1$$
$$y_k - y_{k-1} = d_2$$
$$z_k - z_{k-1} = d_3$$

und indem man quadriert und addiert:

$$(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

Thut man dasselbe bei den Identitäten (3), so findet man:

$$s_n \cos\alpha_n = \sum^{n-1} s_k \cos\alpha_k \; ; \quad s_n \cos\beta_n = \sum^{n-1} s_k \cos\beta_k \; ;$$

$$s_n \cos\gamma_n = \sum^{n-1} s_k \cos\gamma_k$$

Quadriert und addiert man, so ergibt sich:

$$s_n^2 = (\sum^{n-1} s_k \cos\alpha_k)^2 + (\sum^{n-1} s_k \cos\beta_k)^2 + (\sum^{n-1} s_k \cos\gamma_k)^2 \quad . \quad (4)$$

woraus durch Ausziehen der Quadratwurzel die Gröfse der Strecke $s_n$ bestimmt werden kann. Setzt man den gefundenen Wert in:

$$\cos\alpha_n = \frac{\sum^{n-1} s_k \cos\alpha_k}{s_n} ; \quad \cos\beta_k = \frac{\sum^{n-1} s_k \cos\beta_k}{s_n} ;$$

$$\cos\gamma_k = \frac{\sum^{n-1} s_k \cos\gamma_k}{s_n} \qquad (5)$$

so sind hiedurch Richtung und Sinn der Strecke gegeben.

Wenn also jetzt im Raume $n-1$ Strecken in beliebiger Lage gegeben sind, für welche die Summe ihrer Projectionen auf die Coordinatenaxen nicht verschwindet, so läfst sich jederzeit durch Rechnung eine Strecke der Gröfse und Richtung nach finden, aus welcher zusammen mit den gegebenen Strecken ein geschlossenes Polygon hergestellt werden kann, dessen Seiten den gegebenen Strecken aequipollent sind. Die Lage der Strecke bleibt dabei unbestimmt, aufser in dem Falle, wo sämtliche Strecken denselben Anfangspunkt haben. Wie nämlich in (38) gezeigt wurde, ist Gröfse, Richtung und Sinn der Resultante bestimmt durch die Schlufslinie des Kräftepolygons. Soll nun die Resultante mit den gegebenen Strecken denselben Anfangspunkt haben, so braucht man nur von letzteren aus eine mit der Schlufslinie des Kräftepolygons aequipollente Strecke zu ziehen, um auch die Lage der Resultante zu erhalten.

Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche eine beliebige Raumgerade $p$ mit den Axen bildet, und multipliziert man die Identitäten (3) beziehungsweise mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und addiert, so ergibt sich:

$$\cos\alpha \sum^{n} s_k \cos\alpha_k + \cos\beta \sum^{n} s_k \cos\beta_k + \cos\gamma \sum^{n} s_k \cos\gamma_k \equiv o$$

oder nach den Polygonseiten geordnet:

$$\sum^{n} s_k \cos(k\,p) \equiv o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wenn man setzt:

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha_k + \cos\beta \,.\, \cos\beta_k + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma_k = \cos(k\,p)$$

und also $(k\,p)$ den Winkel bedeutet, welchen die Polygonseite $s_k$ mit der Raumgeraden $p$ bildet.

Nun sind aber die einzelnen Glieder der Summe auf der linken Seite der Identität (6) nichts anderes als die Projectionen der Polygonseiten $s_k$, oder der mit ihnen aequipollenten Strecken auf die Raumgerade $p$.

Daher der Satz:

> Die Projection eines geschlossenen Polygons, dessen Perimeter einen bestimmten Sinn hat, auf eine beliebige Raumgerade ist Null, und, wenn die Summe der Projectionen von $n$ Raumstrecken auf eine beliebige Gerade identisch verschwindet, dann läfst sich aus diesen Strecken durch beliebige, aber aequipollente, Aneinanderreihung derselben immer ein geschlossenes Polygon herstellen.

## 43.

**Ermittelung der Resultante auf graphischem Wege.** Die in den letzten Nummern angewandte Beweisführung über die Lehrsätze von den Eigenschaften eines räumlichen Streckensystems bringt es mit sich, dafs alle diese Lehrsätze auch für die Projectionen eines solchen Systems auf die drei Coordinatenebenen gelten; denn die Projectionen einer Raumstrecke haben mit dieser immer zwei Coordinaten gemein, die dritte aber ist Null. In Folge dessen reduziert sich jedes in den vorhergehenden Nummern aufgestellte Formelsystem auf nur zwei Formeln, die aber für die Projection des Streckensystems in der betreffenden Coordinatenebene ganz dasselbe aussagen, was das vollständige Formelsystem für den Raum behauptet.

Diese Bemerkung gestattet die Aufgabe zu lösen, die geometrische Resultante eines räumlichen Streckensystems durch Zeichnung zu ermitteln. Ist nämlich das räumliche Streckensystem, das wir kurz mit $\Sigma$ bezeichnen wollen, durch seine Projectionen $\Sigma'$, $\Sigma''$, $\Sigma'''$ auf die drei Coordinatenebenen gegeben, so hat man nur nötig, zu diesen drei Systemen die Kräftepolygone zu construieren, wobei die Lage der letzteren ganz willkührlich bleibt. Sind $s'$, $s''$, $s'''$ die Schlufslinien derselben, dann ist die Resultante $s$ gegeben durch:

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}(s'^2 + s''^2 + s'''^2)}$$

nach (26); denn $s'$, $s''$, $s'''$ sind notwendig aequipollent mit den Projectionen der Resultante $s$. Denkt man sich nämlich zu dem Streckensystem $\Sigma$ das Kräftepolygon $K$ im Raume construiert und auf die Coordinatenebenen projiciert, dann sind die Seiten der Polygone $K'$, $K''$, $K'''$ notwendig aequipollent den Strecken der Systeme $\Sigma'$, $\Sigma''$, $\Sigma'''$. Daraus folgt aber nach (38) die Richtigkeit der Behauptung. Die Richtung der Resultante wird, nachdem mit Hilfe der Formeln ($26_3$) die Neigungswinkel gegen die Coordinatenaxen berechnet sind, nach (25) construiert.

Man kann auch die wahre Gröfse der Resultante $s$ des Streckensystems $\Sigma$ nach der in Fig. 25 angewandten Methode rein durch Construction finden, wenn bei der Zeichnung der zu $\Sigma'$ und $\Sigma''$ gehörigen Kräftepolygone $K'$ und $K''$ von zwei Punkten $P'$ und $P''$ ausgegangen wird, welche die erste, beziehungsweise zweite, Projection eines beliebigen Raumpunktes $P$ sind. Es sind nämlich dann $s'$ und $s''$ die erste und zweite Projection einer mit der Resultante $s$ aequipollenten Strecke.

Die Zerlegung einer Raumstrecke (Fig. 36) in zwei Componenten geschieht mittelst Zeichnung dadurch, dafs man die Projectionen der Strecke in zwei Componenten zerlegt. Die sonst willkührlich angenommenen Punkte $P'$ und $P''$, von welchen aus nach (39) die Zerlegung bewerkstelligt wird, müssen so gewählt werden, dafs sie als Projectionen eines und desselben Raumpunktes $P$ aufgefafst werden können. Auf diese Art erhält man die Projectionen der Componenten der Resultante, und aus diesen nach dem Verfahren in Fig. 25 die wahren Gröfsen der Componenten, und nach (25) ihre Richtungen.

## Übungsaufgaben.

1. Man bestimme den Winkel, welchen die Radienvectoren der Punkte $(-3, 5, 7)$ und $(4, -2, -3)$ miteinander bilden.

Aufl. Man benütze (**33.**$_3$) und überzeuge sich durch Zeichnung der Punkte, dafs der gesuchte Winkel stumpf ist.

2. Welchen Winkel bilden die Radienvectoren der Punkte $(3, -5, 6)$ und $(-4, 7, 9)$ miteinander?

3. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, deren Radienvectoren auf dem Radiusmeter des Punktes $(-7, 5, -10)$ senkrecht stehen.

Aufl. Die Coordinaten sämtlicher Punkte genügen der Gleichung

$$-7x + 5y - 10z = o.$$

4. Man gebe die Inhalte der Dreiecke an, welche durch den Coordinatenanfang und die in Aufg. 1) und 2) gegebenen Punkte bestimmt sind.

5. Es seien $(3, -5, 6)$, $(-4, 5, -7)$ und $(5, -6, -10)$ drei Eckpunkte eines Dreiecks. Man bestimme sämtliche Stücke desselben.

Aufl. Man berechne zunächst nach (**26.**$_2$) die Seiten des Dreiecks. Dies gibt

$$s_1 = \sqrt{211} \qquad s_2 = \sqrt{261} \qquad s_3 = \sqrt{169}$$

Hierauf nach (**35**) die Winkel $v_1$, $v_2$, $v_3$ und den Inhalt.

6. Es seien zwei Punkte gegeben: $(5, 3, 7)$ und $(-2, 8, 6)$. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte, deren Verbindungslinien mit denselben einen rechten Winkel einschliefsen.

Aufl. Sind $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines Punktes von der verlangten Eigenschaft, dann findet man als die gesuchte Bedingung nach (**35**):

$$(x-5)(x+2) + (y-3)(y-8) + (z-7)(z-6) = o$$

Diese Gleichung mufs notwendig eine Kugel darstellen. Wie grofs ist der Radius der Kugel?

7. Ein Dreieck habe die Eckpunkte $(5, 4, -10)$, $(3, 7, 6)$ und $(6, 3, 8)$; sein Lot bilde mit der positiven Halbaxe der $z$ einen spitzen Winkel. Man projiciere dasselbe auf die $xy$ Ebene.

Aufl. Das Dreieck durchsetzt die $xy$ Ebene. Der untere Teil sowohl, wie der obere, ist der Vorderseite abgewendet. Somit hat man als Projectionsdreieck eine positive Gröfse, welche nach (**35.**$_2$) berechnet werden mufs.

8. Welches sind die Coordinaten des Fufspunktes des Lotes, das man vom Ursprunge auf das vorige Dreieck fällen kann?

Aufl. Es seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Fufspunktes. Verbindet man ihn mit den drei Ecken des Dreiecks, so mufs sein Radiusvector auf diesen Verbindungslinien senkrecht stehen. Nach (**35**) ist aber dann

$$\begin{aligned} x\,(5-x) + (4-y)\,y - (10+z)\,z &= o \\ x\,(3-x) + (7-y)\,y + (6-z)\,z &= o \\ x\,(6-x) + (3-y)\,y + (8-z)\,z &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots (1)$$

woraus durch Subtraction die Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 16z &= o \\ -x + y - 17z &= o \end{aligned}$$

aus welchen

$$\frac{y}{z} = -52 \qquad \frac{x}{z} = -70 \quad \ldots\ldots (2)$$

folgt. Setzt man also in den obigen drei Gleichungen $x = -70z$ $y = -52z$, so erhält man die Coordinaten von vier Punkten, darunter den Ursprung. Der Fufspunkt ist unter den drei übrigen dadurch ausgezeichnet, dafs er mit den drei gegebenen in einer Ebene liegt, dafs also seine drei Verbindungsgeraden mit diesen in einer Ebene liegen. Die Bedingung hiefür ist nach (**35**$_6$)

$$\begin{vmatrix} x-5, & y-4, & z+10 \\ x-3, & y-7, & z-6 \\ x-6, & y-3, & z-8 \end{vmatrix} = o \quad \ldots\ldots (3)$$

Somit ist die $z$ Coordinate des Fufspunktes durch die Gleichung gegeben:

$$\begin{vmatrix} -70z-5, & -52z-4, & z+10 \\ -70z-3, & -52z-7, & z-6 \\ -70z-6, & -52z-3, & z-8 \end{vmatrix} = o$$

9. Welches sind die Neigungswinkel der Ebene des Dreiecks in Aufg. 7 gegen die Coordinatenebenen?

Aufl. Nach (4) und (**25**$_2$) hat man:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\varrho} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{\varrho} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{\varrho}$$

wenn $x_1$, $x_1$, $z_1$ die Coordinaten des Fufspunktes des vom Ursprunge gefällten Lotes und $\varrho$ sein Radiusvector ist.

10. Kann man die Neigungswinkel nicht auch auf eine andere Art bestimmen und wenn ja, wie findet man dann die Coordinaten des Fufspunktes des Lotes.

Antw. Nach (**35**$_2$) und (**35**$_3$) berechnet man $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und hierauf nach (**35**$_1$) die Neigungswinkel. Bezeichnet man die Länge des Lotes mit $\varrho$, mit $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten des Fufspunktes, dann ist

$$x_1 = \varrho\cos\alpha \qquad y_1 = \varrho\cos\beta \qquad z_1 = \varrho\cos\gamma$$

Um das unbekannte $\varrho$ zu finden, setzt man diese Werte in (8$_3$) ein.

11. Die drei Punkte in Aufg. 7 bilden mit dem Coordinatenanfang ein Tetraëder. Wie grofs ist sein Volumen?

12. Man bestimme die Höhen des von den drei Punkten (7, —2, 8), (9, 5, —4) und (— 3, 8, 7) gebildeten Dreiecks, ohne vorher seine Seiten und Winkel berechnet zu haben.

Aufl. Es seien $(x, y, z)$ die Coordinaten des Fufspunktes der Höhe, gefällt von der Spitze (7, — 2, 8). Dann ist notwendig nach (**28.**$_3$):

$$x_1 = \frac{9 - 3k}{1 + k} \qquad y_1 = \frac{5 + 8k}{1 + k} \qquad z_1 = \frac{-4 + 7k}{1 + k}$$

Ferner mufs nach (**35**) sein:

$$12\,(x_1 - 7) - 3\,(y_1 + 2) - 11\,(z_1 - 8) = 0$$

woraus sich der Parameter $k$ ergibt. Auf gleiche Weise findet man die Coordinaten der Fufspunkte der beiden andern Höhen.

13. Nachdem nach der vorigen Aufgabe die Höhen des Dreiecks bestimmt sind, controliere man durch Berechnung der Inhalte der Dreiecke aus Grundlinie und Höhe die Richtigkeit der Formel (**35.**$_3$).

14. Die Coordinaten einer Strecke seien 48, 4, 10. Welches sind die Coordinaten einer mit ihr aequipollenten Strecke mit dem einen Endpunkte (5, 7, 6).

Aufl. Sind $x, y, z$ die Coordinaten des andern Endpunktes, dann hat man:

$$x - 5 = 8 \qquad y - 7 = 4 \qquad z - 6 = 10$$

woraus $\qquad x_1 = 13 \qquad y_1 = 11 \qquad z_1 = 16$

Man kann aber auch setzen:

$$5 - x = 8 \qquad 7 - y = 4 \qquad 6 - z = 10$$

woraus $\qquad x_2 = -3 \qquad y_2 = 3 \qquad z_2 = -4$

folgt. Es ist ersichtlich, dafs der Punkt (5, 7, 6) in der Mitte der Punkte (13, 11, 16) und (— 3, 3, — 4) liegt.

15. Welches ist der Sinn der Strecke mit den Coordinaten — 7, 6, — 8 und dem Endpunkte (3, 5, 6)?

Aufl. Ein mit der gegebenen Strecke durch den Coordinatenanfang gezogener Parallelstrahl verläuft im Oktanten VII und bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinuse gegeben sind durch:

$$\cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{149}} \qquad \cos\beta = \frac{6}{\sqrt{149}} \qquad \cos\gamma = \frac{-8}{\sqrt{149}}$$

Ein durch den Punkt (3, 5, 6) mit diesem Strahl gezogener Parallelstrahl gibt Sinn und Lage der Strecke an. Zeichnung!

16. Welches sind die Coordinaten der Eckpunkte eines Polygons, dessen Seiten den Strecken $5, -7, +9$; $-7, 8, -3$; $-4, 9-3, -6, 8, -7$; $15, 9, -10$ aequipollent sind?

Aufl. Der Anfangspunkt des Polygons ist willkührlich; er sei (3, 4, 5). Dann hat man zur Bestimmung der Coordinaten $(\xi, \eta, \zeta)$ der übrigen Eckpunkte die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \xi_1 - 3 = 5 & \xi_2 - \xi_1 = -7 & \xi_3 - \xi_2 = -4 \\ \eta_1 - 4 = -7 & \eta_2 - \eta_1 = 8 & \eta_3 - \eta_2 = 9 \quad \text{u. s. w.} \\ \zeta_1 - 5 = 9 & \zeta_2 - \zeta_1 = -3 & \zeta_3 - \zeta_2 = -3 \end{array}$$

17. Man verzeichne das Kräftepolygon und Seilpolygon für eine beliebige Anzahl, in der $xy$ Ebene gewählten, Strecken. Fig. 37.

Aufl. Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 die gegebenen Strecken und der Sinn derselben durch einen Pfeil angezeigt. Um das Kräftepolygon zu zeichnen, wählt man einen beliebigen Punkt $P$, und ziehe von ihm aus eine Strecke $1' = 1$ parallel und in gleichem Sinne mit 1, vom Endpunkt von 1' eine parallele Strecke $2' = 2$ in gleichem Sinne mit 2 u. s. w. bis man endlich die mit 6 gleiche, parallele und gleichsinnige Strecke 6' gezeichnet und ihren Endpunkt $Q$ gewonnen hat. Die Strecke $QP$, im Sinne $\overline{PQ}$ genommen, ist die geometrische Resultante der gegebenen 6 Strecken.

Um das Seilpolygon herzustellen, nimmt man den Pol $o$ beliebig an, verbindet ihn mit den Ecken des Kräftepolygons, und versieht diese dadurch erhaltenen Strecken mit Pfeilen, deren Spitzen dem Pole abgewendet sind. Es seien $a, b, c, d, e, f$ diese Verbindungsstrecken. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt $\pi$ in der Ebene an, und zieht von ihm aus eine Strecke $a'$ aequipollent mit $a$, von dem Endpunkt von $a'$ eine Strecke $b'$ aequipollent mit $b$, von dem Endpunkt von $b'$ eine Strecke $c'$ aequipollent mit $c$ etc. etc., so erhält man endlich die Strecke $f'$ aequipollent mit $f$. In dem so erhaltenen Polygon sind die Seiten $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ auch mit einem Pfeile im entgegengesetzten Sinne zu versehen, um das Seilpolygon zu vollenden.

Zieht man durch den Punkt $\pi$ eine Parallele mit $a$ bis zum Schnittpunkt mit 1, durch letzteren eine Parallele mit $b$ bis zum Schnittpunkt mit 2, durch letzteren eine Parallele mit $c$ bis zum Schnittpunkt mit 3 u. s. w. und trägt von diesen Schnittpunkten aus auf den anstofsenden Seiten die Strecken $a$ und $b$, $b$ und $c$, $c$ und $d$, $d$ und $e$, $e$ und $f$ auf, so hat man das in der graphischen Statik gebräuchliche Seilpolygon.

18. Es sei in Fig. 38 das Streckensystem 1, 2, 3, 4, 5 durch seine Projectionen 1' 2' 3' 4' 5' und 1'' 2'' 3'' 4'' 5'' gegeben. Man construiere das Kräftepolygon von 1, 2, 3, 4, 5?

Aufl. Es seien 0' und 0'' die erste, beziehungsweise zweite, Projection eines beliebigen Raumpunktes 0. Man construiere dann, wie in der vorigen Aufgabe, die Kräftepolygone $K'$ und $K''$ von $O'$, beziehungs-

weise $O''$ aus; diese sind dann die Projectionen des gesuchten Kräftepolygons $K$.

19. Auf wie viele Arten kann man eine Strecke in zwei Componenten zerlegen?

Aufl. Da die Anzahl der Punkte im Raume dreifach unendlich ist, und der Pol, von dem aus die Zerlegung zu bewerkstelligen ist, beliebig gewählt werden kann, so gibt es dreifach unendlich viele Lösungen.

20. Kann die Richtung der beiden Componenten, in welche eine Strecke zerlegt werden soll, beliebig gewählt werden?

Aufl. Nein, denn die beiden Componenten müssen mit der Resultante ein Dreieck bilden, also immer in derselben Ebene liegen, was nur möglich ist, wenn die Richtung der einen Componente zusammen mit der gegebenen Strecke, eine Ebene bestimmt, welche parallel mit der Geraden ist, welche die Richtung der zweiten Componente angiebt.

21. Es soll bewiesen werden, dafs wenn $n$ feste Punkte im Raume gegeben sind, und man von einem beliebigen Punkte $O$ die Strecken nach den $n$ festen Punkten zieht, und für diese von $O$ aus das Kräftepolygon construiert, die Schlufslinie des letzteren allemal durch einen festen Punkt $S$ geht, wo man auch $O$ annehmen mag.

Aufl. Es seien $x_k$, $y_k$, $z_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots n)$ die Coordinaten der $n$ festen Punkte, $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des beliebigen Punktes $O$. Bezeichnen dann $x_k'$, $y_k'$, $z_k'$ $(k = 2, 3, \ldots n)$ die Eckpunkte des Kräftepolygons, dann hat man

$$\begin{aligned} x_2' - x_1 &= x_2 - x & x_3' - x_2' &= x_3 - x \\ y_2' - y_1 &= y_2 - y & y_3' - y_2' &= y_3 - y \qquad \text{u. s. w.} \\ z_2' - z_1 &= z_2 - z & z_3' - z_2' &= z_3 - z \end{aligned}$$

bis endlich:

$$\begin{aligned} x_n' - x'_{n-1} &= x_n - x \\ y_n' - y'_{n-1} &= y_n - y \\ z_n' - z'_{n-1} &= z_n - z \end{aligned}$$

Hieraus findet man:

$$\begin{aligned} x_2' &= x_1 + x_2 - x \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 - 2x \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - (n-1)\,x \end{aligned}$$

so dafs die Coordinaten des letzten Eckpunktes des Kräftepolygons sind

$$\begin{aligned} x_n' &= \sum_1^n{}' x_k - (n-1)\,x \\ y_n' &= \sum_1^n{}' y_k - (n-1)\,y \\ z_n' &= \sum_1^n{}' z_k - (n-1)\,z \end{aligned}$$

Nun sind nach (28) die Coordinaten eines Punktes auf der Verbindungslinie von $(x, y, z)$ und $(x_n', y_n', z_n')$ von der Form:

$$\xi = \frac{\lambda x + x_n'}{1 + \lambda} = \frac{(\lambda - (n-1))\, x}{1 + \lambda} + \frac{\overset{n}{\Sigma'}\, x_k}{}$$

$$\eta = \frac{\lambda y + y_n'}{1 + \lambda} = \frac{(\lambda - (n-1))\, y + \overset{n}{\Sigma'}\, y_k}{1 + \lambda}$$

$$\zeta = \frac{\lambda z + z_n'}{1 + \lambda} = \frac{(\lambda - (n-1))\, z + \overset{n}{\Sigma'}\, z_k}{1 + \lambda}$$

Für $\lambda = n - 1$ werden diese Ausdrücke unabhängig von den Coordinaten des Punktes $(x, y, z)$. Somit sind

$$\xi = \frac{1}{n} \overset{n}{\Sigma'}\, x_k \qquad \eta = \frac{1}{n} \overset{n}{\Sigma'}\, y_k \qquad \zeta = \frac{1}{n} \overset{n}{\Sigma'}\, z_k$$

die Coordinaten des Punktes $S$. Derselbe heifst der Punkt der mittleren Entfernungen der $n$ festen Punkte. Welche Folgerungen ergeben sich aus diesem Satze?

22. Man projiciere den Linienzug, bestehend aus den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und seinem Radiusvector auf eine Gerade, deren Winkel mit den Axen $\alpha, \beta, \gamma$ sind.

Aufl. Man hat

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - g' = o$$

wo $g'$ die Projection des Radiusvector ist.

23. Man beweise den Satz, dafs die Summe der Quadrate der Abstände irgend eines Punktes von $n$ festen Punkten gleich der Summe der Quadrate der Abstände dieser Punkte von ihrer Mitte, vermehrt um das $n$ fache Quadrat des Abstandes jenes Punktes von der Mitte ist.

Aufl. In den Bezeichnungen der Aufgabe 20 lautet die analytische Formulierung der Aufgabe:

$$\overset{n}{\Sigma'}\, a_k^2 - \overset{n}{\Sigma'}\, m_k^2 + n\, A^2 \,.$$

wenn ist

$$a_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2$$

$$m_k^2 = (x_k - \xi)^2 + (y_k - \eta)^2 + (z_k - \zeta)^2$$

$$A^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

# V. Von der Affinität.

## 44.

**Erweiterung des Begriffs affiner Strecken.** In (27) schon ist darauf hingewiesen, dafs eine Raumstrecke zu ihren orthogonalen Projectionen affin ist und als charakteristische Eigenschaft dieser Verwandtschaft hervorgehoben worden, dafs die Geraden, welche je zwei entsprechende Punkte verbinden, zu einander parallel sind. Diese Eigenschaft affiner Strecken geht nicht verloren, wenn man die Gerade, in welcher die eine Strecke liegt, in der Ebene beider Strecken um den Affinitätspunkt dreht, denn die Endpunkte der Strecke beschreiben dabei concentrische Kreise. In solchen gehören aber zu demselben Centriwinkel parallele Sehnen, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergibt. Auch das Gröfsenverhältnis $l : l'$ ändert sich selbstverständlich in Folge einer derartigen Drehung nicht. Ferner kann, bei jeder Lage von $l$, die eine Strecke aus der andern gefunden werden, wenn der Drehpunkt $\pi$, die Richtung der Parallelen, welche entsprechende Punkte verbinden, und ein Punkt der zu construierenden Strecke gegeben sind.

Nennt man also wegen des Parallelismus der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte die eine Strecke eine Parallelprojection der andern, so können wir sagen, dafs die Parallelprojection einer Strecke zu derselben ebenfalls affin ist, da alle Eigenschaften, die bei der orthogonalen Projection zu Tage treten, auch bei einer beliebigen Parallelprojection vorhanden sind.

## 45.

**Affine Punktreihen.** Wählt man auf der Strecke $l$, deren Parallelprojection $l'$ sei, einen beliebigen Punkt $P$, und bestimmt seine Parallelprojection $P'$ auf $l'$, so wird $l'$ durch $P'$ in demselben Verhältnisse geteilt, in dem $l$ durch $P$ geteilt ist; denn man kann die eine Strecke durch Drehung um den Affinitätspunkt immer in eine solche Lage bringen, dafs die andere ihre Orthogonalprojection

wird, wobei dann die Richtigkeit des Satzes nach den Formeln in (28) in Evidenz tritt, einerlei, ob $P$ auf der innern oder äufsern Strecke $l$ liegt. Gleiches gilt von jedem Punkte der Geraden $L$, auf welcher die Strecke $l$ sich befindet und seinem entsprechenden auf der Parallelprojection $L'$ von $L$, insbesondere entspricht also dem unendlich fernen Punkte der einen Geraden der unendlich ferne Punkt der andern Geraden.

Unter den verschiedenen Lagen, welche die Punktreihe auf der Geraden $L$ bei der Drehung der letzteren um den Affinitätspunkt einnimmt, ist jene von besonderem Interesse, bei welcher dieselbe auf die mit ihr affine Punktreihe $L'$ zu liegen kommt. Bei diesem Zusammenfallen werden beide Punktreihen entweder gleichsinnig oder ungleichsinnig sein, je nachdem $L$ in dem einen oder andern Sinne gedreht worden ist, und es werden im Allgemeinen entsprechende Punkte nicht aufeinander zu liegen kommen. Es ist jedoch klar, dafs in beiden Fällen der Affinitätspunkt ein sich selbst entsprechender Punkt ist, und dafs die unendlich fernen Punkte von $L$ und $L'$ sich decken.

Daher der Satz:

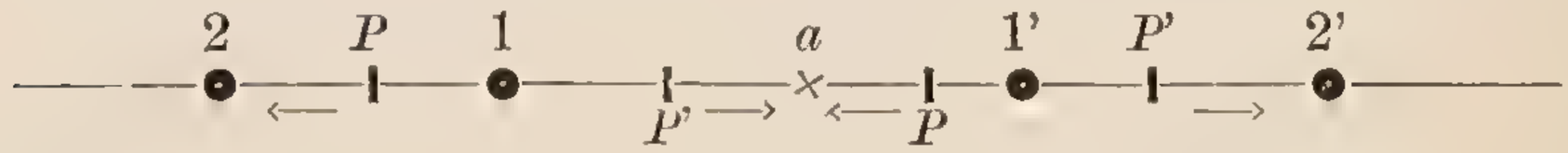
> Zwei aufeinanderliegende, zu einander affine Punktreihen, besitzen **zwei** sich selbst entsprechende Punkte, den Affinitätspunkt und den unendlich fernen Punkt.

Da die Punkte der einen von zwei zusammenfallenden Punktreihen dieselben sind, wie die Punkte der andern, so nennt man eine Doppel-Punktreihe, zwischen deren Punkten eine affine Verwandtschaft besteht, kurz eine affine Punktreihe.

Es ist nützlich, sich eine Vorstellung zu bilden, über die gleichzeitige Bewegung zweier einander entsprechender Punkte affin verwandter Punktreihen. Nehmen wir an, die Geraden $L$ und $L'$ fallen zusammen und die auf ihnen liegenden Punktreihen seien gleichsinnig. Es wird dann der Punkt $P$, indem er die Gerade $L$ durchläuft, seinem entsprechenden Punkte $P'$, der sich auf der Geraden $L'$ gleichzeitig fortbewegt, immer voraus sein bei der Bewegung nach rechts in nachstehender schematischer Figur. Im Unendlichen wird $P'$ den Punkt $P$ einholen und gleichzeitig avancieren, so

dafs er auf der Strecke links zwischen dem unendlich fernen Punkte und dem Affinitätspunkt dem Punkte $P$ voraus sein wird, bis zu seinem Zusammentreffen im Affinitätspunkte $a$. In diesem Augenblicke wird er von $P$ überholt, was zur Folge hat, dafs beide Punkte gleichzeitig in ihre Anfangslage zurückkehren, ohne vorher noch einmal zusammen getroffen zu sein.

Liegen die Punktreihen auf den zusammenfallenden Geraden $L$ und $L'$ ungleichsinnig, so bewegt sich der Punkt $P'$ nach der einen Seite, etwa der rechten, wenn $P$ nach der andern, linken Seite, auf $L$ fortschreitet. Im Unendlichen kreuzen sich beide Punkte, um später im Affinitätspunkte wieder zusammenzutreffen, und indem sie sich dort abermals kreuzen, wieder etwas später zu den Ausgangspunkten der Bewegung zurückzukehren.




Liegen die Geraden $L$ und $L'$ nicht aufeinander, befinden sie sich z. B. in der Lage, bei welcher $l'$ die Orthogonalprojection von $l$ ist, so ist die Bewegung der Punkte $P$ und $P'$ der zuerst beschriebenen analog; sie unterscheidet sich von ihr nur dadurch, dafs $P$ und $P'$ zwar gleichzeitig in den unendlich fernen Punkten ihrer zugehörigen Geraden ankommen, aber selbstverständlich dort nicht zusammentreffen können. Auf ganz gleiche Weise verläuft die Bewegung bei den verschiedenen Lagen der Geraden $L$ im ersten und vierten Quadranten der Drehungsebene, während sie im zweiten und vierten Quadranten der zweiten der oben beschriebenen Bewegungen analog ist. Die Vorstellung dieser Bewegungen wird sehr unterstützt durch das Bild der Parameterverteilung, wie es in (**29**) gegeben wurde, indem entsprechenden Punkten $P$ und $P'$ gleiche Parameterwerte zugehören. Man erkennt insbesondere die Notwendigkeit, dafs bei dem Aufeinanderliegen der Punktreihen $L$ und $L'$ die unendlich fernen Punkte (Parameterwert — 1) sich decken müssen.

## 46.

**Affine Punktreihen in allgemeiner Lage.** Das am Schlusse der vorigen Nummer herbeigerufene Bild der Parameterverteilung auf zwei Geraden, deren eine die Orthogonalprojection der andern ist, behufs Fixierung zweier einander affin entsprechender Punkte durch gleiche Parameterwerte, veranlafst uns zur Prüfung der Frage, ob diese Gleichheit der Parameterwerte eine ausreichende Charakteristik der affinen Verwandtschaft zweier Punktreihen ist.

Zunächst möge sich unsere Untersuchung den Punktreihen $L'$, $L''$ und $L'''$ zuwenden, welche die orthogonalen Projectionen der Punktreihe $L$ mit den Grundpunkten $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ sind.

Was die Punktreihen $L'$ und $L''$ anbelangt, so sind die Verbindungsgeraden ihrer nach der Gleichheit der Parameterwerte entsprechenden Punkte nicht parallel zu einander; denn die Richtungen der allerdings in parallelen Ebenen liegenden Verbindungsgeraden der entsprechenden Grundpunkte sind bestimmt durch die Quotienten

$$\frac{z_1}{y_1} \quad \text{und} \quad \frac{z_2}{y_2}$$

welche im Allgemeinen von einander verschiedene Werte haben. Diese Quotienten geben nämlich die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel jener Verbindungsgeraden gegen die $xy$ Ebene an. Klappt man aber die $xz$ Ebene und damit die Punktreihe $L''$ in die $xy$ Ebene um, so werden nach **(21)** die Verbindungsgeraden der einander entsprechenden Grundpunkte parallel und in Folge der Gleichheit der Parameterwerte entsprechender Punkte von $L'$ und $L''$ auch alle andern diesbezüglichen Verbindungsgeraden. Durch den Proceſs des Umklappens treten also alle Eigenschaften in Erscheinung, die wir an affinen Punktreihen kennen gelernt haben. Da durch denselben aber lediglich die Lage der Punktreihen $L'$ und $L''$ gegeneinander geändert wird, so werden wir, wenn von dieser abgesehen wird, die Punktreihen $L'$ und $L''$ auch vor der Umklappung als in affiner Verwandtschaft stehend ansehen dürfen. Um aber in Zukunft beide Lagen der

Punktreihen, nämlich die vor der Umklappung, und jene nach der Umklappung, von einander zu unterscheiden, wollen wir die erstere die allgemeine und die letztere die affine oder besser perspectivische Lage der affinen Punktreihen nennen.

Wir definieren daher:

Affine Punktreihen sind solche, bei welchen entsprechende Punkte die Entfernungen der Grundpunkte beider Reihen in demselben Verhältnisse teilen.

Affine Punktreihen sind in perspectivischer Lage, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte zu einander parallel sind.

Die gleichen Überlegungen, wie die an den Punktreihen $L'$ und $L''$ angestellten, führen, an den Punktreihen $L'$ und $L'''$, beziehungsweise $L''$ und $L'''$, gemacht, zu denselben Definitionen.

## 47.

**Parametergleichung affiner Punktreihen.** Es seien $G$ und $G'$ zwei Gerade im Raume. Auf der ersteren sei eine Punktreihe gegeben mit den Grundpunkten $P$ und $Q$, auf der zweiten eine Punktreihe mit den Grundpunkten $P'$ und $Q'$, und zwar seien $P$ und $P'$ die Nullpunkte, $Q$ und $Q'$ die Unendlichkeitspunkte beider Reihen. Sind dann $X$ und $X'$ zwei einander affin entsprechende Punkte von $G$ und $G'$, so besteht nach der Definition affiner Punktreihen die Beziehung:

$$\frac{X\,P}{X\,Q} = \frac{X'\,P'}{X'\,Q'}$$

Setzt man

$$P\,Q = a \qquad P'\,Q' = a' \qquad X\,P = x \qquad X'\,P' = x'$$

zählt man also die variabeln Entfernungen einander entsprechender Punkte von den einander zugeordneten Grundpunkten $P$ und $P'$, dann geht vorstehende Gleichung über in:

$$x' = \frac{a'}{a} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sind $p$ und $p'$ irgend zwei zugeordnete Punkte auf $G$ und $G'$, ist also nach (1):

$$p' = \frac{a'}{a} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und macht man dieselben zu Anfangspunkten der Zählung für die $x$ und $x'$, so ändert sich die Gleichung (1) nicht; denn sie geht durch die genannte Änderung von $x$ und $x'$ über in

$$x' + p' = \frac{a'}{a} (x + p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung ist aber wegen der (2) identisch mit der (1). Sie ist dies jedoch nicht mehr, wenn die den $p$ und $p'$ entsprechenden Punkte einander nicht zugeordnet sind.

Sind $x_1'$ und $x_1$ zwei andere einander entsprechende Punkte von $G$ und $G'$, ist also:

$$x_1' = \frac{a'}{a} x_1$$

so erhält man durch Subtraction dieser Gleichung von der (1):

$$x_1' - x' = \frac{a'}{a} (x_1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nun sind aber $x_1' - x'$ und $x_1 - x$ zwei Strecken auf $G'$, beziehungsweise $G$, die von einander affin entsprechenden Punkten begrenzt werden. Daher können wir den Satz aussprechen:

> Besteht zwischen zwei Punktreihen eine affine Verwandtschaft, so stehen die Strecken, welche auf denselben von entsprechenden Punkten begrenzt werden, zu einander in constantem Verhältnis.

Die in (**27**) aufgeführte Eigenschaft affiner Strecken in perspectivischer Lage ist daher ein Ausfluſs unserer allgemeinen Definition affiner Punktreihen und besteht für jede Lage der letzteren und der auf ihnen vorhandenen einander zugeordneten Strecken.

Da zwei Raumgerade im Allgemeinen keinen Punkt miteinander gemein haben, so kann selbstverständlich von einem sich selbst entsprechenden Punkte bei der allgemeinen Lage affiner Punktreihen nicht gesprochen werden.

Auch wenn die Träger der Punktreihen $G$ und $G'$ sich schneiden, existiert nicht immer ein Affinitätspunkt; es ist dies nur dann der Fall, wenn der Durchschnittspunkt beider ein sich selbst entsprechender Punkt ist. Ist nämlich $S$ der Durchschnittspunkt von $G$ mit $G'$, und rechnet man die Entfernungen $x$ und $x'$ entsprechender Punkte von diesem, setzt also in (1) statt $x'$ und $x$ die Werte $x' + p'$ und $x + p$, wo $p = PS$ und $p' = P'S$ ist, so geht die Gleichung der Affinität über in

$$x' = \frac{a'}{a} x - \frac{a'p - ap'}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wie wir schon unter (3) gezeigt haben.

Nun ist für den Schnittpunkt $x = x' = o$. Wäre derselbe also ein sich selbstentsprechender Punkt, so müfsten diese Werte der (5) genügen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn

$$a'p - ap' = o$$

d. h. wenn die (2) stattfindet, wenn also zwei zugeordnete Punkte von $G$ und $G'$ in $S$ zusammenfallen oder, was dasselbe ist, wenn die beiden Punktreihen in perspectivischer Lage sich befinden. Denn wenn $G$ und $G'$ einen Punkt gemein haben, und es besteht die (2), so geht die (5) über in die (1). Es besteht also auch dann für zwei beliebige Paare affiner Punkte die (4). Diese sagt aber in dem vorliegenden Fall, wo die beiden Punktreihen perspectivisch liegen, aus, dafs die von dem Paare $(x, x_1)$ auf $G$ begrenzte Strecke die Parallelprojection der von dem zugeordneten Paare $(x', x_1')$ auf $G'$ begrenzten Strecke ist.

Setzt man $x = x'$ in (5) und löst die in $x$ sich ergebende Gleichung:

$$x = \frac{a'}{a} x - \frac{a'p - ap'}{a}$$

nach $x$ auf, so findet man folgenden Wert:

$$x_0 = x_0' = \frac{a\,p' - a'\,p}{a - a'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Es gibt somit auf der Geraden $G$ einen Punkt, dessen Entfernung $x_0$ von $S$ gleich ist der Entfernung $x_0'$ seines affin zugeordneten Punktes auf $G'$ von dem Schnittpunkt $S$. Ist letzterer ein Affinitätspunkt, dann fallen jene beiden Punkte in ihm zusammen, indem $x_0 = x_0' = o$ wird.

Dreht man die Gerade $G$ um $S$, bis sie mit $G'$ zusammenfällt, dann müssen offenbar die beiden so eben gefundenen Punkte $x_0 = x_0'$ zusammenfallen, und da sie entsprechende Punkte sind, so sind sie identisch mit dem Affinitätspunkte der zwei jetzt aufeinanderliegenden Punktreihen $G$ und $G'$. Denn dadurch, dafs beide Punktreihen auf ein und denselben Träger zu liegen kommen, ändern sich die Beziehungen der Punktreihen zu einander und insbesondere die Gleichungen (4) und (5) nicht, weil in diesen Gleichungen der Neigungswinkel der beiden Geraden $G$ und $G'$ gar nicht vorkommt. Dieser allein aber ist es, der sich durch die Drehung ändert. Es besteht insbesondere auch die (1) für zwei aufeinanderliegende affine Punktreihen. Dividiert man dieselbe durch $x\,x'$, so ergibt sich

$$\frac{a}{x} = \frac{a'}{x'}$$

welche Gleichung für $x = x' = \infty$ erfüllt wird. Der unendlich ferne Punkt ist also ebenfalls ein sich selbst entsprechender Punkt.

Die allgemeine Form der (3) ist:

$$x' = a\,x + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Diese Gleichung enthält die zwei Constanten $a$ und $b$, die man immer so bestimmen kann, dafs die (7) eine Verwandtschaft zwischen zwei affinen Punktreihen begründet. Sind nämlich $x_1$ und $x_2$ die Abstände zweier beliebiger Punkte von einem festen Punkte auf $G$; $x_1'$, $x_2'$ die Abstände zweier beliebiger Punkte von einem festen Punkte auf $G'$, und ordnet man durch die Gleichung (7) den Punkt $x_1'$ dem Punkte $x_1$ und den Punkt $x_2'$ dem Punkte $x_2$ zu, so hat man:

$$x_1' = a\,x_1 + b$$
$$x_2' = a\,x_2 + b$$

woraus sich durch Auflösung nach $a$ und $b$ für diese Constanten die Werte ergeben:

$$a = \frac{x_1' - x_2'}{x_1 - x_2} \qquad b = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1 - x_2}$$

Setzt man vorstehende Werte in (7) ein, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$x' = \frac{x_1' - x_2'}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1 - x_2} \quad \ldots \quad (8)$$

welche mit der (5) übereinstimmt, wenn man setzt

$$a' = x_1' - x_2' \qquad p = x_2$$
$$a = x_1 - x_2 \qquad p' = x_1$$

was nach der Bedeutung von $a$, $a'$, $p$, $p'$ gestattet ist.

Es begründet also in der That die (7) eine affine Verwandtschaft zweier Punktreihen in allgemeiner Lage. Findet zwischen den Abständen der willkürlich gewählten variabeln Punktepaare von den festen Punkten auf $G$ und $G'$ die Beziehung statt:

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = o \quad \ldots \quad (9)$$

so wird $b = o$ und die (8) geht über in:

$$x' = \frac{x_1' - x_2'}{x_1 - x_2} x$$

Ein bemerkenswerter Fall bietet sich noch dar, wenn in (7) $a = -1$ ist. Dieselbe geht dann über in

$$x + x' = b$$

Diese Gleichung ändert ihre Form nicht durch Vertauschung von $x$ mit $x'$, also auch nicht durch Vertauschung zweier einander affin entsprechender Punkte. Dieselbe definiert daher in dem Falle, dafs die beiden Punktreihen aufeinander liegen, eine Involution. Man hat also dann Affinität und Involution. Der Affinitätspunkt ist:

$$x = x' = \frac{b}{2}$$

Macht man denselben zum Anfangspunkt der Zählung, so ergibt sich als einfache Gleichung:

$$x + x' = o$$

Die einander entsprechenden Punkte liegen daher gleichweit zu beiden Seiten vom Affinitätspunkt, sie liegen symmetrisch.

Hier begegnen wir der über das Abtragen der positiven und negativen Strecken auf den Coordinatenaxen und über den Sinn der letzteren getroffenen Festsetzung. Fafst man die Axen als Träger von Punktreihen auf, so sind letztere Involutionen, deren entsprechende Punkte obendrein noch affin verwandt sind. Die Doppelpunkte der Involutionen sind der Coordinatenanfang und die unendlich fernen Punkte der Axen.

Ist in (7) $a = 1$ und $b = o$, so hat man den Fall der Congruenz, denn dann ist:

$$x = x'$$

Es sind also entsprechende Strecken congruent.

Die in dieser Nummer aufgestellten Gleichungen über die affine Verwandtschaft zweier Punktreihen setzen voraus, dafs die Träger der letzteren gegeben sind, und lassen daher keinen Schlufs zu auf die Lage der Träger selbst. Diesem Mangel soll in den nächsten Nummern abgeholfen werden.

## 48.

**Projection einer Punktreihe auf die Coordinatenaxen.** Das Formelsystem

$$x = x_1 + \varrho \cos\alpha \quad y = y_1 + \varrho \cos\beta \quad z = z_1 + \varrho \cos\gamma \ldots (1)$$

definiert nach (**26.**$_7$) eine Punktreihe auf der Geraden, welche durch den festen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ und die Richtung $(\alpha, \beta, \gamma)$ bestimmt ist. Erheben wir nun die Frage nach der Bedeutung jeder einzelnen dieser Formeln, so läfst sich diese dahin beantworten, dafs die erste Formel eine Punktreihe auf der $x$ Axe, die zweite eine solche auf der $y$ Axe, und die dritte eine ebensolche auf der $z$ Axe darstellt, wenn $\varrho$ wie in (**26.**$_7$) jeden beliebigen Wert an-

nehmen kann. Bezeichnet man die Punktreihe im Raume, welche durch das System (1) dargestellt ist mit $L$, und ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen mit $L_x$, $L_y$, $L_z$, dann sind letztere die so eben erwähnten Reihen, wie man sich leicht klar macht.

Es soll nun nachgewiesen werden, dafs die Punktreihen $L_x$, $L_y$, $L_z$ unter sich und zum Original $L$ in der Verwandtschaft der Affinität stehen. Denn nach (**28**) lassen sich die (1) auf die Form (**28**.$_3$) bringen. Aus dieser ist aber ersichtlich, dafs die Projectionen eines beliebigen Punktes von $L$ mit diesem und untereinander gleiche Parameterwerte haben, und folglich nach der in der vorigen Nummer gegebenen Definition zu affinen Punktreihen gehören. Die Punktreihen $L$, $L_x$, $L_y$, $L_z$ befinden sich jedoch im Allgemeinen nicht in affiner Lage.

Durch die Punktreihe $L$ sind ihre drei Projectionen auf die Axen bestimmt und umgekehrt; überhaupt gilt alles, was früher über den Punkt und seine Projectionen gesagt wurde, auch von einer Punktreihe und ihren Projectionen.

Um dies nachzuweisen, mufs gezeigt werden, dafs die Projectionen der Bestimmungsstücke von $L$ die Bestimmungsstücke der Projectionen $L_x$, $L_y$, $L_z$ sind. Für den festen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ und den Träger von $L$ ist dies ohne weiteres klar. Denn wie man die Projectionen des ersteren bestimmt, ist bekannt, und die Projectionen des letzteren sind eben die Coordinatenaxen. Umgekehrt, bestimmen die Anfangspunkte $(x_1, 0, 0)$; $(0, y_1, 0)$; $(0, 0, z_1)$, von $L_x$, $L_y$, $L_z$, von denen aus mit Hilfe der variabeln Strecke $\varrho$ diese Punktreihen erzeugt werden, auch den Anfangspunkt $(x_1, y_1, z_1)$ von $L$. Aber die Coordinatenaxen bestimmen nicht die Richtung des Trägers $L$. Es bedarf daher die Bestimmung des Trägers noch einer besonderen Feststellung, soll der oben ausgesprochene Satz Geltung haben. Bezeichnet man nun die Projectionen der variabeln Strecke $\varrho$ durch $\varrho_x$, $\varrho_y$, $\varrho_z$, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{\varrho_x}{\varrho} \qquad \cos\beta = \frac{\varrho_y}{\varrho} \qquad \cos\gamma = \frac{\varrho_z}{\varrho}$$

Es sind somit die Verhältnisse der variabeln Strecke $\varrho$ zu ihren Projectionen auf die Coordinatenaxen für alle Punkte der Reihe

$L$ constant. Für den Punkt in der Einheit der Entfernung von $(x_1, y_1, z_1)$ insbesondere hat man

$$e_1 = \cos\alpha \qquad e_2 = \cos\beta \qquad e_3 = \cos\gamma$$

Diese drei Zahlen $e_1$, $e_2$, $e_3$ sind also die Einheiten der variabeln Strecken $\varrho_x$, $\varrho_y$, $\varrho_z$, mit welchen die Punktreihen $L_x$, $L_y$, $L_z$ construiert werden. Da sie identisch sind mit den Cosinusen der Winkel, welche die Richtung des Trägers von $L$ bestimmen, so kann man sich ihrer zur Bestimmung der Richtung des letzteren bedienen. Nach (**25**) besteht zwischen diesen drei Zahlen die Relation:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

Adjungiert man also jetzt dem Punkte $(x_1, o, o)$ die willkürliche Maſseinheit $e_1$ für die $x$ Axe, dem Punkte $(o, y_1, o)$ die willkürliche Maſseinheit $e_2$ für die $y$ Axe, und endlich dem Punkte $(o, o, z_1)$ die Maſseinheit $e_3$ für die $z$ Axe, und wählt letztere so, daſs die vorstehende Bedingung erfüllt ist, so wird dadurch die Punktreihe $L$ vollständig bestimmt; denn zieht man durch den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ eine Gerade, deren Richtungscosinuse beziehungsweise die Maſseinheiten $e_1$, $e_2$, $e_3$ sind, so ist diese der Träger von $L$, und die Einheit der variabeln Strecke $\varrho$ ist

$$\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$$

Sind also jetzt

$$a + \lambda, \qquad b + \mu, \qquad c + \nu$$

drei beliebige Binome und versteht man unter $a$, $b$, $c$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, unter $\lambda$, $\mu$, $\nu$ drei Zahlen, welche der Bedingung

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

genügen, so bestimmen diese drei Binome eine Punktreihe $L$ mit dem Anfangspunkte $(a, b, c)$ und mit dem Träger von der Richtung $(\lambda, \mu, \nu)$. Man kann deshalb jene drei Binome die Coordinaten der Punktreihe $L$ nennen.

Durch diese Betrachtungen erhält die am Schluſse der Nummer (**31**) gemachte Bemerkung, daſs eine Involution auf einer gegebenen Geraden durch ihr Centrum und einen ihrer Doppelpunkte vollständig bestimmt ist, eine erhöhte Bedeutung; denn

Alles, was vorhin über die Projectionen einer einfachen Punktreihe und über die Bestimmung dieser aus jenen gesagt wurde, gilt auch für eine involutorische Punktreihe. Wir werden jedoch hierüber erst später handeln.

## 49.

**Analytische Darstellung affiner Punktreihen durch rechtwinklige Coordinaten.** Nach (28) kann man die Punktreihe $L$ und ihre Orthogonalprojection $L'$ darstellen durch

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad z = o$$

Wird nun die Gerade $L$ um den Affinitätspunkt gedreht, bis sie mit $L'$ zusammenfällt, so ändern sich zwar dadurch die Grundpunkte der auf $L$ liegenden Punktreihe nicht in Bezug auf irgend einen festen Punkt von $L$, aber es ändert sich ihre Lage gegen das Coordinatensystem und damit auch die Lage eines jeden Punktes $(x, y, z)$ der Punktreihe $L$ gegen letzteres. Seien nun $(x_1', y_1', o)$, $(x_2', y_2', o)$, $(x', y', o)$ die neuen Lagen von $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ und $(x, y, z)$, dann sind beide Punktreihen dargestellt durch:

$$x' = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1 + \lambda} \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y' = \frac{y_1' + \lambda y_2'}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$z' = o \qquad z = o$$

Dabei hat man die Beziehung:

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

weil die Grundpunktepaare der beiden Punktreihen auf derselben Geraden liegen.

Man erhält nun aus den (1) die sich selbst entsprechenden Punkte, wenn man jene Werte von $\lambda$ aufsucht, für welche $x = x'$ und $y = y'$ wird. Zu diesem Zwecke hat man also zu setzen:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1 + \lambda}$$

$$\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{y_1' + \lambda y_2'}{1 + \lambda}$$

Man erkennt nun augenblicklich, dafs $\lambda = -1$ eine Lösung beider Gleichungen ist, und dafs nach Multiplikation mit $1 + \lambda$ die andere Wurzel:

$$\lambda = -\frac{x_1 - x_1'}{x_2 - x_2'} = -\frac{y_1 - y_1'}{y_2 - y_2'} = -\frac{s_1}{s_2} \quad \ldots \quad (2^a)$$

ist, aus dem gleichen Grunde wie bei (2), und wenn $s_1$ die Entfernung $\overline{11'}$ und $s_2$ die Entfernung $\overline{22'}$ bedeutet. Der ersteren Wurzel entspricht nach (30) der unendlich ferne Punkt der Punktreihen $L$ und $L'$, der zweiten der Affinitätspunkt. Um letztere Behauptung zu beweisen, bezeichne $a$ den Affinitätspunkt, dann ist nach der Definition desselben:

$$\frac{\overline{a\,1}}{\overline{a\,2}} = \frac{\overline{a\,1'}}{\overline{a\,2'}}$$

Wendet man nun correspondierende Subtraction an, so findet sich

$$\frac{\overline{a\,1} - \overline{a\,1'}}{\overline{a\,1'}} = \frac{\overline{a\,2} - \overline{a\,2'}}{\overline{a\,2'}}$$

oder:

$$\frac{\overline{a\,1'}}{\overline{a\,2'}} = \frac{s_1}{s_2}$$

Eliminiert man $\lambda$ aus den zwei ersten Gleichungen (1) und ebenso aus den beiden folgenden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2\, x_1' - x_1\, x_2'}{x_2 - x_1} \\ y' &= \frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1}\, y + \frac{y_2\, y_1' - y_1\, y_2'}{y_2 - y_1} \end{aligned} \quad \ldots \quad (3)$$

Die erste dieser Formeln ist in vollständiger Übereinstimmung mit der Formel (**47.**$_8$). Da dieselbe nur die $x$ Coordinaten von Punkten enthält, so stellt sie eine affine Verwandtschaft der Punkte der $x$ Axe oder zweier auf dieser liegenden Punktreihen $x$ und $x'$ dar. Der Affinitätspunkt derselben ist gegeben durch

$$x_0 = \frac{x_2\, x_1' - x_1\, x_2'}{(x_2 - x_1) - (x_2' - x_1')} \quad \ldots \quad (3^a)$$

Es ist dies aber auch die $x$ Coordinate des Affinitätspunktes $a$ der aufeinander liegenden affinen Punktreihen $L$ und $L'$, wie man leicht findet, wenn man den dem letzteren entsprechenden Parameterwert ($2^a$) in die erste Formel des Systems (1) einsetzt.

Die zweite Formel (3) hat ebenfalls die Form der (**47.**$_8$). Sie stellt daher zwei in affiner Verwandtschaft stehende Punktreihen auf der $y$ Axe dar, mit dem Affinitätspunkt:

$$y_0 = \frac{y_2\, y_1' - y_1\, y_2'}{(y_2 - y_1) - (y_2' - y_1')} \quad \ldots \quad (3^b)$$

Dies ist aber die $y$ Coordinate des Affinitätspunktes $a$.

Daraus folgt, dafs die Affinitätspunkte der Affinitäten (3) die orthogonalen Projectionen des Affinitätspunktes $a$ von $L$ und $L'$ sind. Es ist also letzterer construierbar, wenn die ersteren gegeben sind.

Bezeichnet man den Winkel, welchen der gemeinschaftliche Träger der beiden Punktreihen $L$ und $L'$ mit der $x$ Axe bildet, durch $\alpha$, so ist

$$tg\,\alpha = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Befreit man die Formeln (3) von den gemeinsamen Nennern durch Multiplikation der ersteren mit $x_2 - x_1$ und der zweiten mit $y_2 - y_1$, so wird ersichtlich, dafs das Verhältnis der Coëffizienten von $y$ und $x$, beziehungsweise jener von $y'$ und $x'$ gleich $tg\ \alpha$ ist.

Die Formeln (3) gestatten also aufser dem Affinitätspunkt auch die Richtung des gemeinsamen Trägers der affinen Punktreihen $L$ und $L'$ zu bestimmen.

Nun ist aber die affine Verwandtschaft, welche durch zwei aufeinanderliegende Punktreihen gebildet wird, durch ihren Träger,

den Affinitätspunkt, und eine Constante, welche das Verhältnis der Entfernungen zweier zugeordneter Punkte vom Affinitätspunkt angibt, nach (**47**) vollständig bestimmt. Wir können daher sagen, dafs die durch die Formeln (3) dargestellten affinen Punktreihen die orthogonalen Projectionen der affinen Punktreihe auf $L$ sind, und dieselbe vollständig bestimmen, denn die Coëffizienten von $x$ und $y$ in (3) sind die fraglichen Constanten. Rechnet man nämlich die Coordinaten statt vom Ursprunge von den Affinitätspunkten $x_0$ und $y_0$ aus, so lauten die (3):

$$x' + x_0 = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}(x + x_0) + \frac{x_2\, x_1' - x_1\, x_2'}{x_2 - x_1}$$

$$y' + y_0 = \frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1}(y + y_0) + \frac{y_2\, y_1' - y_1\, y_2'}{y_2 - y_1}$$

woraus durch Substitution von ($3^a$) und ($3^b$) für $x_0$ und $y_0$ folgt:

$$x' = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}\, x \qquad y' = \frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1}\, y$$

Die Übereinstimmung dieser Formeln mit der (**47**$_{10}$) beweist die Richtigkeit der Behauptung.

Die Formeln (3) gestatten nun für jeden Punkt $(x, y, z)$ der Geraden $L'$ die Coordinaten des ihm auf derselben Geraden affin entsprechenden Punktes $(x', y', z')$ zu berechnen und umgekehrt.

Eliminiert man $\lambda$ aus der ersten und vierten, beziehungsweise zweiten und dritten Gleichung des Systems (1), so findet man folgende Formeln:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x_2' - x_1'}{y_2 - y_1}\, y + \frac{y_2\, x_1' - y_1\, x_2'}{y_2 - y_1} \\ y' &= \frac{y_2' - y_1'}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2\, y_1' - x_1\, y_2'}{x_2 - x_1} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (4)$$

Dieselben können in allen Fällen an Stelle der (3) gesetzt werden. Die erste setzt nämlich die einfache Punktreihe, welche die Projection von $L'$ auf die $y$ Axe ist, zu der Projection der Punktreihe $L$ auf die $x$ Axe in affine Beziehung. Die zweite sagt aus, dafs die Projection der Punktreihe $L'$ auf die $x$ Axe affin verwandt sei zu der Projection der Punktreihe $L$ auf die $x$ Axe. Man erkennt aber sofort nach den in (**47**) gegebenen Darlegungen,

dafs die affinen Punktreihen (4) nicht in affiner Lage sich befinden. Dennoch läfst sich aus den (4) der Träger der affinen Punktreihe, deren Projectionen sie sind und der Affinitätspunkt derselben construieren.

Sind nämlich $P$ und $P'$ zwei zugeordnete Punkte des Originals, so liefert die erste der Formeln (4) zu dem $y$ von $P$ das $x$ von $P'$, und die zweite zu dem $x$ von $P$ das $y$ von $P'$. Wenn aber $P$ mit $P'$ zusammenfällt, so müssen beide $x$ und beide $y$ dem Werte nach übereinstimmen. Setzt man also in den (4) $x' = x$ und $y' = y$ und löst die zwei sich ergebenden Gleichungen nach $x$ und $y$ auf, so sind diese Lösungen notwendig die Coordinaten des Affinitätspunktes der Originalpunktreihe. Der rechnerische Nachweis hierüber verursacht einige Weitläufigkeit und wird derselbe als Übungsaufgabe behandelt werden, um diese Nummer nicht allzu sehr mit Formeln zu überladen.

Dividiert man die Coëffizienten von $x$ und $y$ durcheinander, so ergibt sich:

$$tg^2\,\alpha = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

wodurch die Richtung des Trägers bestimmt ist.

Addiert man endlich die (3) und (4), so erhält man neue Formeln, welche ebenfalls dem gleichen Zwecke dienen. Sie sind

$$\begin{aligned} 2\,x' &= \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}\,x + \frac{x_2' - x_1'}{y_2 - y_1}\,y + \frac{x_2\,x_1' - x_1\,x_2'}{x_2 - x_1} + \\ &\quad + \frac{y_2\,x_1' - y_1\,x_2'}{y_2 - y_1} \\ 2\,y' &= \frac{y_2' - y_1'}{x_2 - x_1}\,x + \frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y}\,y + \frac{y_2\,y_1' - y_1\,y_2'}{y_2 - y_1} + \\ &\quad + \frac{x_2\,y_1' - x_1\,y_2'}{x_2 - x_1} \end{aligned} \qquad (5)$$

Man erkennt ohne Mühe, dafs der Coëffizient von $x$ in der ersten Gleichung dem Coëffizienten von $y$ in der zweiten Gleichung nach (2) gleich ist, und dafs das Produkt der beiden andern Coëffizienten von $y$ und $x$ gleich ist dem Quadrate des ersteren. Macht man gleichnamig und setzt:

$$\begin{aligned} 2\ (x_2 - x_1)\ (y_2 - y_1) &= \varrho \\ (y_2 - y_1)\ (x_2' - x_1') &= m \\ (x_2 - x_1)\ (x_2' - x_1') &= r \\ (y_2' - y_1')\ (y_2 - y_1) &= s \\ (y_2' - y_1')\ (x_2 - x_1) &= m \end{aligned}$$

$$(x_2\, x_1' - x_1\, x_2')\ (y_2 - y_1) + (y_2\, x_1' - x_2'\, y_1)\ (x_2 - x_1) = c$$

$$(y_2\, y_1' - y_1\, y_2')\ (x_2 - x_1) + (y_1'\, x_2 - x_1\, y_2')\ (y_2 - y_1) = d$$

dann nehmen die (5) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \varrho\, x' &= m\, x + r\, y + c \\ \varrho\, y' &= s\, x + m\, y + d \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo gleichzeitig ist:

$$r\, s - m^2 = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Formeln (5) erheischen bei ihrem Gebrauche die Vorsicht, dafs man nur solche Punkte $(x, y)$ wähle, welche auf dem durch die Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ bestimmten Träger liegen. Auch gestatten sie nicht die Auflösung nach $x$ und $y$, obwohl letztere Coordinaten sich zufolge (3) und (4) durch $x'$ und $y'$ linear ausdrücken lassen. Es liegt also hier ein Fall vor, wo die Determinante zweier linearer Gleichungen in $x$ und $y$ verschwindet, und dennoch Auflösungen vorhanden sind.

Wenn die Beziehungen statt haben:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'}$$

dann hat man

$$c = d = o$$

und die (6) werden homogen:

$$\begin{aligned} \varrho\, x' &= m\, x + r\, y \\ \varrho\, y' &= s\, x + m\, y \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Als nächsten Fall behandeln wir die Punktreihen $L'$ und $L''$ und bezeichnen die Coordinaten der Punkte der ersten Reihe mit $x'$, $y'$, $z'$, diejenigen eines Punktes der zweiten mit $x''$, $y''$, $z''$, dann sind beide Punktreihen dargestellt durch:

$$x' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad x'' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad y'' = o$$

$$z' = o \qquad z'' = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Es springt nun sofort in die Augen, dafs, wenn die Punkte von gleichen Parameterwerten einander zugeordnet werden,

$$x' = x''$$

ist. Es erübrigt daher nur noch, die Beziehung zwischen der $y$ Coordinate eines Punktes von $L'$ und der $z$ Coordinate des zugehörigen Punktes von $L''$ aufzustellen. Da nun $\lambda$ in den Formeln für $y'$ und $z''$ den gleichen Wert hat, so kann man es aus denselben eliminieren. Der Vollzug dieser Elimination liefert die gesuchte Beziehung:

$$y' = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} z'' + \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Klappt man nun die $xz$ Ebene um in die $xy$ Ebene, in dem in **(21)** vorgeschriebenen Sinne, so hat man, um für die neue Lage der Punktreihen $L'$ und $L''$ die Beziehungen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte zu erhalten, nach **(22)** zu setzen:

$$z_2 = - y_2'' \qquad z_1 = - y_1'' \qquad z'' = - y''$$

wo $y_1''$, $y_2''$ dem absoluten Werte nach mit $z_1$ und $z_2$ übereinstimmen, sich aber selbstverständlich von $y_1$ und $y_2$ unterscheiden. Durch diese Transformationen ändert die Formel (9) nur ihr Aussehen, die Werte der in denselben auftretenden Constanten bleiben dieselben. Sie wird

$$y' = \frac{y_2 - y_1}{y_2'' - y_1''} y'' + \frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{y_2'' - y_1''} \quad . \quad . \quad (10)$$

Hieraus geht aber im Vergleiche mit (**47.**$_8$) die Berechtigung, die Punktreihen $L'$ und $L''$ auch vor der Umklappung als in affiner Verwandtschaft stehend anzusehen, sehr klar hervor. Die (10) stellt eine affine Punktreihe auf der $y$ Axe dar, indem dieselbe die Projectionen der einfachen Punktreihen $L'$ und $L''$ auf diese

Axe in affine Beziehung zu einander setzt. Der Affinitätspunkt wird erhalten, wenn man in (10) $y' = y''$ setzt und die so entstehende Gleichung auflöst; er ist also

$$y_0' = y_0'' = \frac{y_1\, y_2'' - y_2\, y_1''}{y_2'' - y_1'' - (y_2 - y_1)} = \frac{y_2\, z_1 - y_1\, z_2}{(z_1 - z_2) - (y_2 - y_1)}$$

Die Punktreihen $L'$ und $L''$ befinden sich also nach der Umklappung in perspectivischer Lage, was übrigens schon aus der Identität $x' = x''$ hervorgeht. Die letztere stellt eine congruente Punktreihe dar, welche entsteht durch die Projectionen der einfachen Punktreihen $L'$ und $L''$ auf die $x$ Axe. Projiciert man $L'$ auf die $x$ Axe, $L''$ auf die $z$ Axe, dann stehn beide Projectionen in der Beziehung, die sich durch Elimination von $\lambda$ aus den Formeln für $x'$ und $z''$ ergibt, was der Vollständigkeit halber erwähnt sein mag.

Für die Punktreihen $L'$ und $L'''$ hat man, wenn die Coordinaten eines Punktes der letzteren Reihe mit $x'''$, $y'''$, $z'''$ bezeichnet werden:

$$x' = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda} \qquad x''' = o$$

$$y' = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda} \qquad y''' = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}$$

$$z' = o \qquad z''' = \frac{z_1 + \lambda\, z_2}{1 + \lambda}$$

woraus sich die Formeln

$$y''' = y'$$

$$z''' = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\, x' + \frac{x_2\, z_1 - x_1\, z_2}{x_2 - x_1}$$

ergeben.

Transformiert man diese Formeln nach (**22**), so hat man zu setzen:

$$z''' = -x''' \qquad z_2 = -x_2' \qquad z_1 = -x_1'$$

und man findet

$$y''' = y'$$

$$x''' = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}\, x' + \frac{x_2\, x_1' - x_1\, x_2'}{x_2 - x_1} \quad . \quad . \quad (11)$$

Es sind also auch die Punktreihen $L'$ und $L'''$ vor der Umklappung in affiner Verwandtschaft. Die Identität $y''' = y'$ repräsentiert eine Congruenz auf der $y$ Axe, herrührend von den Projectionen von $L'$ und $L'''$ auf dieselbe, die Formel (11) ist die analytische Darstellung der affinen Punktreihe auf der $x$ Axe, welche durch Projection von $L'$ und $L'''$ auf diese Axe entstanden ist. Der Affinitätspunkt der letzteren ist:

$$x_0' = x_0''' = \frac{x_1' x_2 - x_2' x_1}{(x_2 - x_1) - (x_2' - x_1')} = \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_1 - x_2 - z_2 + z_1}$$

Was endlich die Punktreihen $L''$ und $L'''$ anbelangt, so hat man für sie:

$$x'' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad x''' = o$$

$$y'' = o \qquad y''' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z'' = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad z''' = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

woraus folgt:

$$z''' = z''$$

$$y''' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x'' + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Klappt man nun die $yz$ Ebene um in die $xz$ Ebene, so kommen $L''$ und $L'''$ in affine Lage und bleiben darin, wenn man hierauf die $xz$ Ebene in die $xy$ Ebene, als Zeichenebene, umklappt. Die vorstehenden Formeln ändern sich dabei aber ihrem Wesen nach nicht, denn an die Stelle der darin vorkommenden Coordinatenzeichen treten durch diese Umklappungsprocesse andere, welche dem absoluten Werte nach jenen gleich sind, folglich sind $L''$ und $L'''$ auch vor der Umklappung als in affiner Verwandtschaft stehend zu betrachten.

Man erkennt jetzt auch die vollständige Richtigkeit der in (27) gemachten Behauptung, daſs die Punktreihen $L''$ und $L'''$ durch Umklappung der $xz$ und $yz$ Ebene in die Zeichenebene nicht in affine Lage gebracht werden können. Denn ein Punkt von $L''$ hat nach der Umklappung die Coordinaten:

$$x'' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y'' = -\frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

und der dem gleichen Parameterwert entsprechende Punkt auf $L'''$ ist nach der Umklappung

$$y''' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad x''' = -\frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Für den Schnittpunkt der Träger beider Punktreihen ist $y'' = y'''$ und $x'' = x'''$. Soll derselbe Affinitätspunkt sein, so mufs also für den gleichen Wert von $\lambda$

$$x_1 + \lambda x_2 = -(z_1 + \lambda z_2)$$
$$y_1 + \lambda y_2 = -(z_1 + \lambda z_2)$$

sein, was für ein gegebenes $\lambda$ nur für

$$(x_1 + z_1)(y_2 + z_2) - (x_2 + z_2)(x_1 + z_1) = 0$$

möglich ist, welche Bedingungsgleichung aber im Allgemeinen nicht erfüllt sein wird.

## 50.

**Allgemeine Gleichungen affiner Punktreihen.** Es seien zwei beliebige Gerade $G$ und $G'$ im Raume als Träger zweier Punktreihen gegeben. Sind $(a_1, b_1, c_1)$ und $(a_2, b_2, c_2)$ die Grundpunkte der einen Punktreihe, $(a_1', b_1', c_1')$ und $(a_2', b_2', c_2')$ die Grundpunkte der andern, und sollen die Nullpunkte beider Reihen einander entsprechen und ebenso die Unendlichkeitspunkte, so stellen sich die Coordinaten $(x, y, z)$ und $(x', y', z')$ zweier beliebiger entsprechender Punkte dar durch:

$$x = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda} \qquad x' = \frac{a_1' + \lambda a_2'}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda} \qquad y' = \frac{b_1' + \lambda b_2'}{1 + \lambda} \quad \ldots (1)$$

$$z = \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} \qquad z' = \frac{c_1' + \lambda c_2'}{1 + \lambda}$$

Da Punkten, die einander entsprechen, gleiche Parameterwerte zugehören, so braucht man nur aus den beiden in je einer Horizontal-

reihe stehenden Formeln $\lambda$ zu eliminieren, um die Coordinaten eines beliebigen Punktes der ersten Reihe durch die gleichnamigen Coordinaten des entsprechenden Punktes der zweiten Reihe auszuzudrücken. Auf diese Weise erhält man:

$$x = \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1'}$$

$$y = \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{b_1 b_2' - b_2 b_1'}{b_2' - b_1'} \quad \ldots \quad (2)$$

$$z = \frac{c_2 - c_1}{c_2' - c_1'} z' + \frac{c_1 c_2' - c_2 c_1'}{c_2' - c_1'}$$

Diese Formeln gestatten nun für jeden Punkt $(x', y', z')$ die Coordinaten des zugehörigen Punktes $(x, y, z)$ zu berechnen, allerdings vorläufig mit der Einschränkung, dafs der erstere immer auf der Verbindungsgeraden der Punkte $(a_1', b_1', c_1')$, $(a_2', b_2', c_2')$ gewählt werden mufs, was wohl zu beachten ist. Die erste Gleichung stellt eine Affinität auf der $x$ Axe dar, die zweite eine solche auf der $y$ Axe, und die dritte stellt eine Affinität auf der $z$ Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems dar. Diese Affinitäten entstehen durch Projection der zu einander affinen Punktreihen auf $G$ und $G'$ auf die Coordinatenaxen. Die Affinitätspunkte der drei Affinitäten haben die Coordinaten

$$x_0 = \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{(a_2' - a_1') - (a_2 - a_1)} \qquad y_0 = \frac{b_1 b_2' - b_2 b_1'}{(b_2' - b_1') - (b_2 - b_1)}$$

$$z_0 = \frac{c_1 c_2' - c_2 c_1'}{(c_2' - c_1') - (c_2 - c_1)} \quad \ldots \quad (3)$$

denn diese Werte ergeben sich aus den (2), wenn man $x = x'$; $y = y'$; $z = z'$ setzt. Macht man diese Affinitätspunkte, wie in (47) geschehen, zu Anfangspunkten der Zählung für die betreffenden Coordinatenaxen, so nehmen die (2) die einfache Gestalt an:

$$x = \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} x' \qquad y = \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'} y' \qquad z = \frac{c_2 - c_1}{c_2' - c_1'} z'$$

Man erkennt leicht, dafs dieselben aufgefasst werden können, als auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Ursprung der Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ ist, und dessen Axen mit den Axen des alten Systems

parallel sind. Dividiert man vorstehende Gleichungen durcheinander, so ergibt sich:

$$\frac{z}{x} = \frac{z'}{x'} \cdot \frac{(c_2 - c_1)\ (a_2' - a_1')}{(c_2' - c_1')\ (a_2 - a_1)} \qquad \frac{z}{y} = \frac{z'}{y'} \cdot \frac{(c_2 - c_1)\ (b_2' - b_1')}{(c_2' - c_1')\ (a_2 - a_1)}$$

Nun ist aber für den unendlich fernen Punkt des Trägers $G$ nach (**30**$_1$):

$$\frac{z}{x} = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1} \qquad \frac{z}{y} = \frac{c_2 - c_1}{b_2 - b_1}$$

Setzt man diese Werte in vorstehende Formeln, so findet sich:

$$\frac{z'}{x'} = \frac{c_2' - c_1'}{a_2' - a_1'} \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{c_2' - c_1'}{b_2' - b_1'}$$

Dies sind aber die Verhältnisse der Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Punktreihe auf $G'$. Somit entsprechen sich die unendlich fernen Punkte beider Reihen.

Auch die andere in (**47**) ausgesprochene Haupteigenschaft affiner Punktreihen ist in den Formeln (2) verborgen. Sind nämlich $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ zwei beliebige Punkte auf $G$, im Abstande $\varepsilon$, $(x_1', y_1', z_1')$ und $(x_2', y_2', z_2')$ ihre entsprechenden auf $G'$, im Abstande $\varepsilon'$, dann hat man nach den (2):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'}(x_1' - x_2') \\ y_1 - y_2 &= \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'}(y_1' - y_2') \qquad \ldots \quad (4) \\ z_1 - z_2 &= \frac{c_2 - c_1}{c_2' - c_1'}(z_1' - z_2') \end{aligned}$$

Es wird also zufolge (**26**$_2$) und (4):

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2} =$$

$$\frac{\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1' - a_2'}\right)^2 (x_2' - x_1')^2 + \left(\frac{b_1 - b_2}{b_1' - b_2'}\right)^2 (y_2' - y_1')^2 + \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1' - c_2'}\right)^2 (z_2' - z_1')^2}{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2} + \frac{}{\varepsilon'^2}$$

oder wenn man auf der rechten Seite im Zähler und Nenner mit $(x_1' - x_2')^2$ dividiert und beachtet, dafs

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{b_2' - b_1'}{a_2' - a_1'} \qquad \frac{z_2' - z_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{c_2' - c_1'}{a_2' - a_1'}$$

ist,

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} = \frac{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}{(a_2' - a_1')^2 + (b_2' - b_1')^2 + (c_2' - c_1')^2}$$

also, wenn man die Entfernung der Grundpunkte auf $G$ und $G'$ mit $s$, beziehungsweise mit $s'$, bezeichnet:

$$\varepsilon : \varepsilon' = s : s' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

was zu beweisen war.

Der Punkt (3), dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen die Affinitätspunkte der Affinitäten (2) sind, liegt im Allgemeinen weder auf $G$ noch auf $G'$; er ist aber selbstverständlich der Affinitätspunkt der beiden Punktreihen auf $G$ und $G'$, wenn die Träger sich schneiden und die Punktreihen in perspectivischer Lage sich befinden. Nun sind nach (5) die Entfernungen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ irgend zweier zugeordneter Punkte auf $G$ und $G'$ vom Affinitätspunkte constant. Diese Eigenschaft kommt dem Punkte (3) für den Fall, dafs die Träger der Punktreihen parallel sind, ebenfalls zu. Sind nämlich $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_1', y_1', z_1')$ irgend zwei zugeordnete Punkte auf $G$ und $G'$, so findet man, wenn auf beiden Seiten einer jeden der Gleichungen (2) beziehungsweise $x_0$, $y_0$, $z_0$ subtrahiert wird, nach einigen leichten Reductionen:

$$x - x_0 = \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'}(x' - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'}(y' - y_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$z - z_0 = \frac{c_2 - c_1}{c_2' - c_1'}(z' - z_0)$$

Es ist nämlich zunächst:

$$x - \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1' - a_2 + a_1} = \frac{a_2' - a_1'}{a_2 - a_1} x + \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1'} - \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1' - a_2 + a_1}$$

oder wenn man die beiden constanten Glieder auf der rechten Seite vereinigt:

$$x - \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1' - (a_2 - a_1)} = \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} x' - \frac{(a_2 - a_1)(a_1 a_2' - a_2 a_1')}{(a_2' - a_1')(a_2' - a_1' - a_2 + a_1)} =$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} \left( x' - \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1' - a_2 + a_1} \right)$$

Dies ist aber die erste der Formeln (6). Die beiden andern verstehen sich nun von selbst. Ist jetzt in den (6):

$$\frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} = \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'} = \frac{c_2 - c_1}{c_2' - c_1'} = k \quad . \quad . \quad (7)$$

so erhält man durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2} = k^2$$

Somit hat man, wenn $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_0'$ die Entfernungen zweier zugeordneter Punkte von dem Punkte $(x_0, y_0, z_0)$ bedeuten:

$$\varepsilon_0 : \varepsilon_0' = k = s : s' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

denn die Träger $G$ und $G'$ sind, wenn die Bedingungen (7) bestehen, zueinander parallel, wie man leicht findet (Fig. 39). Da ferner die Verbindungsgeraden zweier zugeordneter Punkte mit dem Punkte $(x_0, y_0, z_0)$ diesen letzteren gemeinschaftlich haben, so fallen sie wegen

$$x - x_0 = k (x' - x_0)$$
$$y - y_0 = k (y' - y_0)$$
$$z - z_0 = k (z' - z_0)$$

zusammen, weil die Cosinuse ihrer Neigungswinkel gegen die Axen einander gleich sind; denn es ist

$$\frac{x' - x_0}{\varepsilon_0'} = \frac{x - x_0}{k \varepsilon_0'} = \frac{x - x_0}{\varepsilon_0} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier affiner Punktreihen schneiden sich also in demselben Punkte, wenn die Träger beider Punktreihen zueinander parallel sind. Weil nach (5) und (8) die Proportion statt hat:

$$\varepsilon : \varepsilon' = \varepsilon_0 : \varepsilon_0'$$

so sind die in dieser Proportion auftretenden Strecken Seiten ähnlicher Dreiecke. Aus diesem Grunde nennt man den Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ Ähnlichkeitspunkt, und sagt, die Punktreihen $G$ und $G'$ seien in perspectivisch-ähnlicher Lage. Es ist leicht einzusehen, dafs der Ähnlichkeitspunkt aufserhalb oder innerhalb des von den beiden parallelen Trägern gebildeten Streifens liegt, je nachdem die Punktreihen gleichsinnig sind oder nicht. Der Fall, dafs die Träger der beiden Punktreihen zusammenfallen, ist in dem vorigen eingeschlossen. Der Ähnlichkeitspunkt führt aber dann den Namen Affinitätspunkt. — Die Formeln (2) nehmen eine besonders bemerkenswerte Gestalt an, wenn der Punkt $(a_2', b_2', c_2')$ mit dem Punkte $(a_1, b_1, c_1)$ und der Punkt $(a_1', b_1', c_1')$ mit dem Punkte $(a_2, b_2, c_2)$ zusammenfällt, nämlich:

$$x = -x' + (a_1 + a_2)$$
$$y = -y' + (b_1 + b_2)$$
$$z = -z' + (c_1 + c_2)$$

Der Affinitätspunkt ist also der Mittelpunkt des von den beiden Grundpunkten gebildeten inneren Segmentes. Macht man denselben zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Axen den Axen des alten Systems parallel sind, so hat man die einfachen Beziehungen:

$$x + x' = o \qquad y + y' = o \qquad z + z' = o$$

also Involution und Affinität auf den Coordinatenaxen.

Um einem möglichen Mifsverständnisse vorzubeugen, mufs noch bemerkt werden, dafs zwei Punktreihen, deren entsprechende Segmente ein constantes Verhältnis zueinander haben, auch ähnliche Punktreihen genannt werden. In diesem Werke wird diese Bezeichnung hauptsächlich dann gebraucht werden, wenn die Träger der Punktreihen parallel sind. Für alle andern Lagen der Träger soll die Benennung affin vorgezogen werden, wie bereits geschehen. Geht man nämlich einen Schritt weiter und betrachtet krummlinige Punktreihen, also Curven, so besteht ein Unterschied zwischen ähnlichen und affinen Curven, ebenso zwischen ähnlichen und affinen Flächen und Körpern; nur bei der geradlinigen Punktreihe decken sich die Begriffe ähnlich und affin vollkommen. Es

ist deshalb gleichgültig, ob man hier das Wort affin oder das Wort ähnlich gebraucht, um die oben bewiesenen Eigenschaften zweier geradliniger Punktreihen zu bezeichnen. Der Unterschied tritt aber sofort hervor, wenn die Träger der geradlinigen Punktreihen Grenzen von ebenen Figuren, z. B. von Dreiecken, sind. Denn die einander entsprechenden Punktreihen können in diesem Falle ähnlich sein, ohne dafs es die Figuren sind, sie können aber nicht affin, oder die orthogonalen Projectionen zu einander sein, ohne dafs dies bei den von ihnen eingeschlossenen Figuren auch der Fall ist. Am deutlichsten geht übrigens aus der analytischen Darstellung hervor, dafs ähnliche Punktreihen eine spezielle Lage ihrer Träger erfordern, wie oben nachgewiesen wurde.

Neben dem Gleichungssystem (2) bestehen noch die folgenden:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_2 - a_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{a_1 b_2' - a_2 b_1'}{b_2' - b_1'} \\ y &= \frac{b_2 - b_1}{c_2' - c_1'} z' + \frac{b_1 c_2' - b_2 c_1'}{c_2' - c_1'} \\ z &= \frac{c_2 - c_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{c_1 a_2' - c_2 a_1'}{a_2' - a_1'} \end{aligned} \quad \ldots \quad (3)$$

und

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_2 - a_1}{c_2' - c_1'} z' + \frac{a_1 c_2' - a_2 c_1'}{c_2' - c_1'} \\ y &= \frac{b_2 - b_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{b_1 a_2' - b_2 a_1'}{a_2' - a_1'} \\ z &= \frac{c_2 - c_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{c_1 b_2' - c_2 b_1'}{b_2' - b_1'} \end{aligned} \quad \ldots \quad (4)$$

welche durch gleichzeitige cyclische Vertauschung der gestrichenen Buchstaben $x'$, $y'$, $z'$ und $a'$, $b'$, $c'$ aus den Formeln (2) hervorgehen, oder dadurch gewonnen werden, dafs man die Elimination von $\lambda$ in leicht zu erratender Weise aus den (1) paarweise vollzieht.

Die geometrische Bedeutung der Formeln (3) und (4) ist leicht zu erschliefsen. Bezeichnet man nämlich die Projectionen der Punktreihe auf $G$ auf die Coordinatenaxen mit $G_x$, $G_y$, $G_z$ und dieselben Projectionen der Punktreihe auf $G'$ mit $G_x'$, $G_y'$, $G_z'$, dann entsprechen folgende drei Gruppierungen dieser sechs Projectionen;

| | | |
|---|---|---|
| $G_x,\ G_x'$ | $G_x,\ G_y'$ | $G_x,\ G_z'$ |
| $G_y,\ G_y'$ | $G_y,\ G_z'$ | $G_y,\ G_x'$ |
| $G_z,\ G_z'$ | $G_z,\ G_x'$ | $G_z,\ G_y'$ |

den drei Gleichungssystemen (2), (3) und (4). Die erste der Formeln (3) setzt also die einfache Punktreihe $G_x$ zur Punktreihe $G_y'$ in affine Beziehung, die zweite Formel dieses Systems setzt $G_y$ zu $G_z'$, die dritte $G_z$ zu $G_x'$ in affine Beziehung. Ähnliches gilt von der dritten Gruppe oder den Formeln (4). Betrachten wir nun die Formeln, welche den verschiedenen Combinationen der Projectionen von $G$ und $G'$ entsprechen, so müssen zufolge der ersten und zweiten, der vierten und sechsten, dann der achten und neunten Combination, die Gleichungen bestehen:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_1'} = \frac{a_2 - a_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{b_2' a_1 - a_2 b_1'}{b_2' - b_1'}$$

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{b_1 a_2' - b_2 a_1'}{a_2' - a_1'} = \frac{b_2 - b_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{b_1 b_2' - b_2 b_1'}{b_2' - b_1'}$$

$$\frac{c_2 - c_1}{a_2' - a_1'} x' + \frac{c_1 a_2' - c_2 a_1'}{a_2' - a_1'} = \frac{c_2 - c_1}{b_2' - b_1'} y' + \frac{c_1 b_2' - c_2 b_1'}{b_2' - b_1'}$$

Dafs dies drei identische Gleichungen sind, erkennt man sofort, wenn die erste mit $a_2 - a_1$, die zweite mit $b_2 - b_1$, die dritte mit $c_2 - c_1$ dividiert und das constante Glied einer jeden Gleichung gehörig reduziert wird. Die reduzierte Form, welche so erhalten wird, ist:

$$(b_2' - b_1')\, x' - (a_2' - a_1')\, y' + a_2' b_1' - a_1' b_2' = o \quad . \quad (9)$$

Vergleicht man die Formeln miteinander, welche der ersten und dritten, der fünften und sechsten, dann der siebenten und achten Combination entsprechen, und verfährt ebenso wie vorhin, so resultiert die Gleichung zwischen $x'$ und $z'$:

$$(a_2' - a_1')\, z' - (c_2' - c_1')\, x' + c_2' a_1' - c_1' a_2' = o \; . \quad (10)$$

und auf ähnliche Weise findet sich durch Vergleichung der Formeln, welche den drei Combinationen vier und fünf, zwei und drei, sieben und neun entsprechen, die Gleichung zwischen $y'$ und $z'$:

$$(c_2' - c_1')\, y' - (b_2' - b_1')\, z' - c_2' b_1' + c_1' b_2' = o \; . \quad (11)$$

Statt, wie so eben geschehen, aus den Formeln (2), (3) und (4)

die Coordinaten des Punktes $(x, y, z)$ zu eliminieren, kann man auch jene des Punktes $(x', y', z')$ fortschaffen, und erhält so die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(b_2 - b_1)\ x - (a_2 - a_1)\ y + a_2\ b_1 - a_1\ b_2 &= o\\ (c_2 - c_1)\ y - (b_2 - b_1)\ z + b_2\ c_1 - b_1\ c_2 &= o\\ (a_2 - a_1)\ z - (c_2 - c_1)\ x + c_2\ a_1 - c_1\ a_2 &= o\end{aligned} \quad . \quad (12)$$

Die Gleichungen (9) bis (12) in der Form (**49.**$_4$) geschrieben, lassen erkennen, dafs die ersten drei die Punktreihen $G_x'$, $G_y'$, $G_z'$, und die letzten drei die Punktreihen $G_x$, $G_y$, $G_z$ in affine Beziehung zu einander setzen. So setzt die Gleichung (9) die Punktreihe $G_x'$ zur Punktreihe $G_y'$ in affine Beziehung. Construiert man die Punkte, welche zu den Wertepaaren $(x', y')$ gehören, so liegen alle auf einer Geraden, welche ist die orthogonale Projection $G'_{xy}$ von $G'$ auf die $x\,y$ Ebene. Die Gleichung (10) sagt aus, dafs die Punktreihe $G'_x$ zur Punktreihe $G'_z$ affin sei. Die Wertepaare $(x', z')$ bestimmen Punkte, gelegen auf der orthogonalen Projection $G'_{xz}$ von $G'$. Ebenso bestimmt die Gleichung (11) die orthogonale Projection $G_{yz}'$ von $G'$, und die Gleichungen (12) repräsentieren die orthogonalen Projectionen $G_{xy}$, $G_{xz}$, $G_{yz}$ von $G$. Wir werden hierauf im nächsten Kapitel ausführlicher eingehen.

Es liegt nun nahe, die Frage zu erheben, was drei Gleichungen von der Form (2) mit allgemeinen Coëfficienten bedeuten, wenn zwischen den Variabeln keine weiteren Bedingungen bestehen.

Sind

$$\begin{aligned}x' &= p_1\,x + q_1\\ y' &= p_2\,y + q_2\\ z' &= p_3\,z + q_3\end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die drei Gleichungen zwischen den Coordinaten zweier Punkte $(x, y, z)$ und $(x', y', z')$, so stellt nach (**47**) die erste eine Affinität auf der $x$ Axe, die zweite eine solche auf der $y$ Axe und die dritte eine solche auf der $z$ Axe dar. Es sind also durch diese Gleichungen die Punkte auf einer jeden Axe einander paarweise zugeordnet, aber die Punktepaare der einen Axe stehen in keiner Beziehung zu den Punktepaaren der beiden andern Axen, mit andern Worten, es kann jede der Coordinaten $x, y, z$ auf der betreffenden Coordinatenaxe beliebig gewählt werden, die zugehörigen Werte

$x'$, $y'$, $z'$ sind dann durch die (13) bestimmt und umgekehrt. Die Coordinaten $x$, $y$, $z$ bestimmen aber einen Punkt im Raume, und die ihnen entsprechenden $x'$, $y'$, $z'$ einen zweiten Punkt, der von dem ersteren im Allgemeinen verschieden ist. Durch die Gleichungen (13) werden also die Punkte des unendlichen Raumes einander paarweise zugeordnet, derart, dafs die Projectionen eines jeden Paares auf die Coordinatenaxen Punktepaare einer Affinität sind. Die Gleichungen (13) begründen daher zwischen den Punkten des Raumes jene Verwandtschaft, die wir Affinität genannt haben.

Ist in diesen Gleichungen

$$p_1 = p_2 = p_3$$

dann begründen dieselben die Verwandtschaft der Ähnlichkeit, und ist endlich

$$p_1 = p_2 = p_3 = -1$$

so werden die Punkte des Raumes durch die (13) einander involutorisch zugeordnet. Der Punkt, welcher bei der affinen Zuordnung sich selbst entspricht, der Affinitätspunkt, hat die Coordinaten:

$$x_0 = \frac{q_1}{1-p_1} \qquad y_0 = \frac{q_2}{1-p_2} \qquad z_0 = \frac{q_3}{1-p_3}$$

Der Ähnlichkeitspunkt hat also die Coordinaten:

$$x_0 = \frac{q_1}{1-p_1} \qquad y_0 = \frac{q_2}{1-p_1} \qquad z_0 = \frac{q_3}{1-p_1}$$

und das Involutionscentrum endlich ist gegeben durch:

$$x_0 = \frac{q_1}{2} \qquad y_0 = \frac{q_2}{2} \qquad z_0 = \frac{q_3}{2}$$

Für $q_1 = q_2 = q_3 = o$ fallen diese Punkte mit dem Coordinatenanfang zusammen.

In den Gleichungen (13) kommen dreimal zwei Constanten vor. Zur Bestimmung derselben sind daher, wie in (47), zwei Paare von Punkten erforderlich. Ist der Affinitätspunkt gegeben, so vertritt dieser ein Punktepaar, und man hat also neben diesem nur ein einziges Punktepaar nötig, um die Affinität des unendlichen Raumes festzulegen.

## 51.

**Graphische Darstellung affiner Punktreihen.** Die graphische Darstellung zweier affiner Punktreihen, deren Träger die Raumgeraden $G$ und $G'$ sind, kann auf zweifache Art geschehen. Man projiciert entweder die Punktreihen auf die Coordinatenaxen und hat dann die axonometrische Darstellung derselben, mit welcher wir uns später befassen werden, oder man projiciert die Punktreihen auf die Coordinatenebenen nach den in (**21**) und (**22**) gegebenen Regeln. Beide Darstellungen hängen innig zusammen, da die ersteren Projectionen zu den letzteren orthogonal sind. Dabei sind es wesentlich drei Fälle, die zu behandeln sind, je nach dem die Träger der beiden Punktreihen zusammenfallen, parallel sind, oder sich schneiden oder kreuzen. Wir werden in dieser Nummer die Darstellung affiner Punktreihen in einer Ebene geben, und die Darstellung beliebiger Punktreihen auf das nächste Kapitel verschieben.

Wir behandeln zunächst den Fall, dafs die beiden Träger parallel sind. Es seien $A$ und $A'$ ein Paar entsprechende Punkte, $B$ und $B'$ ein zweites Paar. Verbindet man dann $A$ mit $A'$ und $B$ mit $B'$, so schneiden sich diese Verbindungsgeraden in einem Punkte $S$, der das Centrum eines Strahlbüschels ist, dessen Strahlen auf $G$ und $G'$ affin verwandte Punkte ausschneiden. Fig. 39 gibt die Construction für gleichsinnige, Fig. 39ª für ungleichsinnige Punktreihen.

Schneiden sich die beiden Träger so, dafs der Schnittpunkt Affinitätspunkt ist, dann ist nur ein einziges Paar zugeordneter Punkte erforderlich, um die affinen Punktreihen herzustellen. Verbindet man nämlich die Punkte des gegebenen Paares, dann liegen die affin verwandten Punkte auf den Strahlen eines Parallelstrahlbüschels, dessen Strahlen jener Verbindungsgeraden parallel sind (Fig. 40). $A$ und $A'$ sind die zugeordneten Punkte des Paares, $\pi$ der Affinitätspunkt.

Die Combination der Lösungen dieser beiden Aufgaben führt zur Construction affiner Punktreihen auf $G$ und $G'$, wenn der Schnittpunkt der Träger nicht zugleich Affinitätspunkt ist. (Fig. 41.) In diesem Falle müssen wieder zwei Paare, $A$, $A'$ und $B$, $B'$, ein-

ander zugeordneter Punkte gegeben sein. Zieht man dann den Träger $G''$ parallel zu $G'$ durch $A$ (oder $B$) und trägt auf ihm eine Punktreihe auf, welche der Punktreihe $A$, $B$ congruent ist, macht also $A\,A'' = A\,B$, dann ist die Punktreihe auf $G''$ affin verwandt zur Punktreihe auf $G$ und $A$ ist der Affinitätspunkt. Nimmt man also jetzt auf $G$ einen beliebigen Punkt $X$ an, dessen affin zugeordneter auf $G'$ construiert werden soll, so sucht man zunächst nach der zweiten der so eben gelösten Aufgaben $X''$ auf $G''$, und dann mit Hilfe des Strahlbüschels $S$ nach der ersten Aufgabe $X$ auf $G'$.

Liegen endlich (Fig. 42) die zwei affinen Punktreihen aufeinander, und ist der Affinitätspunkt nicht gegeben, sondern zwei Paare entsprechender Punkte $A$, $A'$ und $B$, $B'$, dann findet man zu einem Punkte $X$ der Punktreihe $A$, $B$, . . den affin zugeordneten auf $A'$, $B'$ . . ., wenn man durch $A$ eine Gerade $G''$ zieht, und auf dieser von $A$ aus eine mit der Punktreihe $A'\,B'$ congruente Punktreihe $A''\,B'' = A'\,B'$ construiert. Ist dann $X$ ein Punkt der Reihe $A\,B$, so ist $X''$ auf $G''$ sein zugehöriger Punkt, und $X'$ im Abstande $B'\,X' = B''\,X''$ auf $G$ der gesuchte Punkt.

Um den Affinitätspunkt $\pi$ beider Punktreihen zu erhalten, beachtet man, dafs derselbe entweder gleichzeitig aufserhalb der beiden Strecken $A\,B$ und $A'\,B'$, oder gleichzeitig innerhalb derselben liegen mufs, wie sich aus der Darstellung der Punktreihen durch Parameter ergibt, und dafs ferner für ihn die Proportion:

$$\pi\,A' : \pi\,A = a' : a$$

besteht, wo $a' = A'\,B'$ und $a = A\,B$ ist. Es ist nun von vornherein klar, dafs wenn die Punktreihen $A\,B\ldots$ und $A'\,B'\ldots$ gleichsinnig sind, der Affinitätspunkt $\pi$ entweder rechts oder links von der Strecke $A\,A'$ liegt, je nachdem $a > a'$ oder $a < a'$ ist. Derselbe teilt nämlich die Strecke $A\,A'$, wie die Proportion sagt, im Verhältnis $a : a'$. Bei der ersten Voraussetzung ist dieses aber gröfser als die Einheit, und $\pi$ liegt daher nach (**29**) zwischen dem unendlich fernen Punkte und $A'$; im zweiten Falle ist $a : a'$ kleiner als die Einheit, somit liegt $\pi$ zwischen dem unendlich fernen Punkte und $A$. Fig. 43 gibt die Construction von $\pi$ in

beiden Fällen. Die Teilung der Strecke geschieht von $A$ aus, wenn $a > a'$ und von $A'$ aus, wenn $a' < a$ ist, auf bekannte Weise. Dafs man statt der Strecke $A'$ auch die Strecke $B\,B'$ im Verhältnis von $a : a'$ teilen kann, um den Affinitätspunkt zu erhalten, ist selbstverständlich.

Sind die Punktreihen $A, B \ldots$ und $A', B', \ldots$ ungleichsinnig, so liegt $\pi$ innerhalb der Strecken $A\,A'$; denn in der obigen Proportion haben in diesem Falle $a$ und $a'$ entgegengesetzte Zeichen; es ist also das Verhältnis $A\,\pi : \pi\,A'$ positiv. $\pi$ liegt auf dem ersten halben Segmente $A\,A'$, wenn $a : a'$ gröfser als die Einheit, auf dem zweiten, wenn dieser Quotient kleiner als die Einheit ist. In Fig. 44 ist die Construction ausgeführt.

Ist die affine Verwandtschaft zwischen den Punkten einer Raumgeraden durch den Affinitätspunkt $\pi$ und durch zwei zugeordnete Punkte gegeben, so zeigt Fig. 45 die Construction zweier zugeordneter Punkte $x$ und $x'$; denn es ist immer:

$$\overline{\pi\,x} : \overline{\pi\,x'} = a : a'$$

## 52.

**Dreiecke in perspectivisch-affiner Lage.** Weil die in (35) betrachteten Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ die orthogonalen Projectionen des Raumdreiecks $\triangle$ sind, so stehen jene zu diesem in der Verwandtschaft der Affinität und zwar befinden sie sich in perspectivisch-affiner Lage. Daraus erkennt man, dafs

> die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken affiner Dreiecke in perspectivischer Lage zueinander parallel sind.

Affine Dreiecke haben aber noch andere Eigenschaften, die wir nun darlegen wollen.

Zunächst findet man als Coordinaten der Affinitätspunkte $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_1$ zweier entsprechender Seiten der Dreiecke $\triangle$ und $\triangle_1$ nach (28):

$$\begin{array}{lll} \dfrac{x_1 z_3 - x_3 z_1}{z_3 - z_1} & \dfrac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{z_1 - z_2} & \dfrac{x_3 z_2 - x_2 z_3}{z_2 - z_3} \\[2ex] \dfrac{y_1 z_3 - y_3 z_1}{z_3 - z_1} & \dfrac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{z_1 - z_2} & \dfrac{y_3 z_2 - y_2 z_3}{z_2 - z_3} \end{array} \qquad (1)$$

Um z. B. die Coordinaten von $\delta_1$ zu bestimmen, bemerke man, dafs dieselben die Form (**28.**$_3$) haben. Da aber $z = o$ ist, so hat man zur Bestimmung von $k$:

$$z_2 + k z_3 = o \qquad \text{also} \qquad k = -\frac{z_2}{z_3}$$

welcher Wert in die Ausdrücke für $x$ und $y$ eingesetzt, die beiden andern Coordinaten des Punktes liefert. Für die Punkte $\delta_2$ und $\delta_3$ hat $k$ beziehungsweise die Werte:

$$k = -\frac{z_3}{z_1} \qquad \text{und} \qquad k = -\frac{z_1}{z_2}$$

Multipliciert man die Glieder der ersten Reihe beziehungsweise mit:

$$z_2 (z_3 - z_1) \qquad z_3 (z_1 - z_2) \qquad z_1 (z_2 - z_3)$$

und addiert die Produkte, so erhält man identisch Null. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man die Glieder der zweiten Reihe beziehungsweise mit den vorstehenden Ausdrücken multipliciert und die Produkte addiert. Da aber

$$z_2 (z_3 - z_1) + z_3 (z_1 - z_2) + z_1 (z_2 - z_3) \equiv 0$$

ist, so liegen nach (**28.**$_7$) die drei Punkte $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ auf einer Geraden. Daher der Satz:

> Die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten zweier in perspectivischer Lage befindlicher affiner Dreiecke liegen auf einer Geraden.

Man nennt diese Gerade die Affinitätsaxe der beiden Dreiecke. Es ist die Schnittlinie der Ebenen der Dreiecke $\triangle$ und $\triangle_1$.

Fällt man jetzt von den entsprechenden Ecken der beiden affinen Dreiecke die Perpendikel $p_1, p_2, p_3$, beziehungsweise $p_1', p_2', p_3'$ auf die Affinitätsaxe, so haben dieselben paarweise gemeinschaftliche Fufspunkte, und es ist daher nach (**35.**$_8$):

$$p_1' = p_1 \cos\gamma \qquad p_2' = p_2 \cos\gamma \qquad p_3' = p_3 \cos\gamma \quad . \quad (2)$$

wenn $\gamma$ den Neigungswinkel der Ebenen der Dreiecke bezeichnet. Hieraus ergibt sich die fortlaufende Proportion:

$$p_1' : p_2' : p_3' = p_1 : p_2 : p_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daher der Satz:

**Fällt man von entsprechenden Eckpunkten zweier affiner Dreiecke, welche sich in perspectivischer Lage befinden, Perpendikel auf die Affinitätsaxe, so stehen dieselben in einem constanten Verhältnisse zueinander.**

Die Coordinaten (1) der Affinitätspunkte $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ nehmen eine von den $z$ ganz unabhängige Gestalt an, wenn man in ihnen setzt:

$$z_3 = p_3 \sin\gamma \qquad z_2 = p_2 \sin\gamma \qquad z_1 = p_1 \sin\gamma \quad . \quad . \quad (4)$$

Ausdrücke für die $z$, welche sich leicht aus Figur 31 ergeben.

Man findet für die (1):

$$\frac{x_1 p_3 - x_3 p_1}{p_3 - p_1} \qquad \frac{x_2 p_1 - x_1 p_2}{p_1 - p_2} \qquad \frac{x_3 p_2 - x_2 p_3}{p_2 - p_3}$$

$$\frac{y_1 p_3 - y_3 p_1}{p_3 - p_1} \qquad \frac{y_2 p_1 - y_1 p_2}{p_1 - p_2} \qquad \frac{y_3 p_2 - y_2 p_3}{p_2 - p_3}$$

Da nun $p_1$, $p_2$, $p_3$ bei Umdrehung der Ebene des Dreiecks $\triangle$ um die Affinitätsaxe immer dieselben Werte behalten, und da ferner vorstehende Ausdrücke von dem Winkel $\gamma$ ebenfalls unabhängig sind, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle$ bei jeder Lage des letzteren immer wieder in denselben Punkten $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, und insbesondere auch dann, wenn die Ebene des Dreiecks $\triangle$ mit der ersten Projectionsebene zusammenfällt. Es ist also auch in dieser Lage das Dreieck $\triangle$ mit dem Dreieck $\triangle_1$ affin. In der That erkennt man leicht aus der Figur, dafs bei der Umdrehung der Ebene des Dreiecks $\triangle$, die Projectionen seiner Eckpunkte auf den Perpendikeln $p_1'$, $p_2'$, $p_3'$ sich fortbewegen. Sind $q_1'$, $q_2'$, $q_3'$ bei irgend einer Lage von $\triangle$ ihre Entfernungen von der Affinitätsaxe, so ist:

$$q_1' : q_2' : q_3' = p_1 : p_2 : p_3$$

und also auch wegen (3):

$$q_1' : q_2' : q_3' = p_1' : p_2' : p_3' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. das Dreieck $\triangle_1$ und die Umlegung $\triangle_1'$ des Dreiecks $\triangle$ sind in affiner Lage.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_1'$ stehen senkrecht auf der Affinitätsaxe. Wenn also das Dreieck $\triangle_1$ und die Affinitätsaxe $\Sigma$ gegeben sind, so weiss man, dass die Eckpunkte eines zu $\triangle_1$ affinen Dreiecks $\triangle_1'$ auf den durch die Eckpunkte des letzteren bestimmten Perpendikeln zur Affinitätsaxe liegen, und auf diesen eine solche Lage haben, dafs ihre Verbindungsgeraden mit den entsprechenden Eckpunkten von $\triangle_1$ sich auf der Affinitätsaxe schneiden. Verlängert man also in $\triangle_1$ die Seite $\overline{1\,3}$ bis zur Affinitätsaxe und zieht durch den Schnittpunkt $\delta_2$ beider eine beliebige Gerade, so schneidet diese die in 1 und 3 zu $\Sigma$ errichteten Perpendikel in zwei Punkten 1' und 3', die man nur mit den Schnittpunkten der Seiten $\overline{2\,3}$ und $\overline{1\,2}$ mit $\Sigma$ zu verbinden braucht. Diese Verbindungsgeraden schneiden sich dann auf dem in 2 zu $\Sigma$ errichteten Perpendikel im Punkte 2'. Das Dreieck 1', 2', 3' ist also affin zu dem Dreieck 1, 2, 3. Durch den Punkt $\delta_2$ sind aber einfach unendlich viele Gerade möglich; es gibt also auch einfach unendlich viele Dreiecke, welche zu dem Dreiecke $\triangle_1$ affin sind in bezug auf eine gegebene Gerade als Affinitätsaxe.

Es ist klar, dafs die in den obigen Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften für jede Lage von $\triangle$ erhalten bleiben, wenn die Ebene dieses Dreiecks um die Affinitätsaxe gedreht wird, während $\triangle_1$ seine ursprüngliche Lage beibehält. Um die Existenz des ersten Satzes für diesen Fall unzweifelhaft darzutun, bezeichne $\triangle'$ eine Lage des Dreiecks $\triangle$, in welcher $z_1'$, $z_2'$, $z_3'$ die $z$ Coordinaten seiner Eckpunkte, und $q_1'$, $q_2'$, $q_3'$ die Lote, gefällt von den Eckpunkten der orthogonalen Projection $\triangle_1'$ von $\triangle'$ auf die Affinitätsaxe sind, dann werden die trigonometrischen Tangenten der Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte der Dreiecke $\triangle'$ und $\triangle_1$ bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\frac{z_1'}{q_1' - p_1'} \qquad \frac{z_2'}{q_2' - p_2'} \qquad \frac{z_3'}{q_3' - p_3'}$$

Ist $\gamma_1$ der Neigungswinkel der Ebene von $\triangle'$ gegen die Ebene von $\triangle_1$, so hat man:

$$\begin{array}{lll} z_1' = p_1 \sin\gamma_1 & z_2' = p_2 \sin\gamma_1 & z_3' = p_3 \sin\gamma_1 \\ q_1' = p_1 \cos\gamma_1 & q_2' = p_2 \cos\gamma_1 & q_3' = p_3 \cos\gamma_1 \end{array} \quad . . \quad (6)$$

Substituiert man diese Werte in die vorigen Ausdrücke, so gehen dieselben unter Berücksichtigung von (2) in den einen

$$\frac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1 - \cos\gamma} = \frac{\sin\gamma_1}{-2\sin\frac{\gamma+\gamma_1}{2}\sin\frac{\gamma+\gamma_1}{2}}$$

über. Damit ist aber auch der erste Satz bewiesen für jede so eben beschriebene Lage des Dreiecks $\triangle$.

Bezeichnen $\triangle'$ und $\triangle''$ irgend zwei Lagen des Dreiecks, während der Drehung seiner Ebene um die Affinitätsaxe, so sind auch die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte dieser Dreiecke parallel zu einander. Denn die Richtungen dieser Verbindungslinien sind bestimmt durch

$$\frac{z_1 - z_1'}{q_1' - p_1'} \qquad \frac{z_2 - z_2'}{q_2' - p_2'} \qquad \frac{z_3 - z_3'}{q_3' - p_3'}$$

welche Ausdrücke wegen (2), (4) und (6) übergehn in den einzigen:

$$\frac{\sin\gamma - \sin\gamma_1}{\cos\gamma_1 - \cos\gamma} = -\operatorname{ctg}\frac{\gamma+\gamma_1}{2}$$

wodurch die Behauptung erwiesen ist. Zwei solche Dreiecke, die offenbar zueinander congruent sind, haben also ebenfalls jene Eigenschaften, welche die Verwandtschaft der Affinität charakterisieren.

Wir schliefsen diese Nummer mit dem Satze:

> Dreht man die Ebene des einen von zwei affin gelegenen Dreiecken um die Affinitätsaxe, so bleiben die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zueinander parallel, und es kann daher das eine Dreieck in jeder Lage als die Parallelprojection des andern angesehen werden,

und mit dem Hinweise auf das Kapitel »die Ebene«, in welchem bei der Behandlung ebener affiner Figuren auf die Dreiecke $\triangle$ noch einmal zurückgegriffen werden wird.

## Übungsaufgaben.

1. Es seien $G$ und $G'$ die Träger zweier affiner Punktreihen, und ihr Schnittpunkt $S$ der Affinitätspunkt, $A$, $A'$ ein Paar entsprechender Punkte in den Abständen 7 und 9 von $S$. Man construiere zum Punkte $P$ im Abstande 10 von $S$ den zugeordneten Punkt $P'$.

2. Wie wird die Construction ausgeführt in dem Falle, wenn in der vorigen Aufgabe $G$ und $G'$ zusammenfallen, die Bedingungen der Aufgabe aber sonst dieselben bleiben?

3. Es seien $A$ und $A'$, dann $B$ und $B'$ zwei Paare einander zugeordnete Punkte auf $G$ und $G'$, $S$ dagegen kein Affinitätspunkt. Wenn nun

$$SA = 15 \qquad SB = 20 \qquad SC = 50 \qquad SA' = 10 \qquad SB' = 27$$

ist, so construiere man zu dem Punkte $C$ den zugeordneten $C'$.

4. Welches sind die einander entsprechenden Punkte auf $G$ und $G'$, die gleich weit von $S$ abstehen.

Aufl. Nach (47.$_6$) hat man:

$$x_0 - p = \frac{ap' - a'p}{a - a'} - p = \frac{a(p' - p)}{a - a'}$$

$$x_0' - p' = \frac{ap' - a'p}{a - a'} - p' = \frac{a'(p' - p)}{a - a'}$$

wenn gesetzt wird:

$$AS = p \qquad \Pi S = x_0 \qquad AB = a \qquad A'S = p' \qquad \Pi' S = x_0' \qquad A'B' = a'$$

Fig. 46 gibt die Construction von $x_0 - p$ und $x_0' - p'$, welche Strecken dort von $A$ nach $A\Pi$ und von $A'$ nach $A'\Pi'$ aufgetragen sind. Man braucht selbstverständlich nur $S\Pi$ zu suchen, weil $S\Pi' = S\Pi$ ist. Die Construction von $A'\Pi'$ dient also lediglich als Controle. Zahlenbeispiel:

$$SA = 15 \qquad SA' = 20 \qquad AB = 12 \qquad A'B' = 8.$$

5. Ändern $\Pi$ und $\Pi'$ in der vorigen Aufgabe ihre Lage, wenn der Sinn der Punktreihen sich ändert?

6. Es seien $A_1$, $A'$ dann $B_1$, $B'$ zwei Paare zugeordneter Punkte einer Affinität auf einer Geraden $G$. Man soll die letztere so um einen ihrer Punkte drehen, dafs die Strecke $AB$ die Orthogonalprojection der Strecke $A'B'$ wird. Welches ist der Drehpunkt?

Aufl. Der Drehpunkt ist der Affinitätspunkt.

7. Man bestimme die Coordinaten des Affinitätspunktes $\Pi$ einer Punktreihe $L$ und ihrer Orthogonalprojection auf der $xy$ Ebene.

Aufl. Sind $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ die Coordinaten der Grundpunkte von $L$, so ergeben sich als Coordinaten des gesuchten Affinitätspunktes:

$$x_0 = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1} \qquad y_0 = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

8. Wenn in der vorigen Aufgabe der Träger der Punktreihe $L$ um den Affinitätspunkt gedreht wird, bis er mit seiner orthogonalen Projection zusammenfällt; welches sind dann die Coordinaten der Grundpunkte in der neuen Lage.

Aufl. Sind (Fig. 47) $P_1$ und $P_2$ die orthogonalen Projectionen der Grundpunkte, $P_1'$ und $P_2'$ ihre Lage nach der Umdrehung, dann hat man:

$$x_1' = x_1 + \overline{P_1 P_1'} \cos\varphi \qquad y_1' = y_1 + \overline{P_1 P_1'} \sin\varphi$$
$$x_2' = x_2 + \overline{P_2 P_2'} \cos\varphi \qquad y_2' = y_2 + \overline{P_2 P_2'} \sin\varphi$$

wo ist

$$\overline{P_1 P_1'} = z_1 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \qquad \overline{P_2 P_2'} = z_2 \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

wenn $c$ den Neigungswinkel des Trägers von $L$ und seiner orthogonalen Projection bedeutet. Es ist also jetzt:

$$x_1' = x_1 + z_1 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos\varphi \qquad x_2' = x_2 + z_2 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos\varphi$$
$$y_1' = y_1 + z_1 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \sin\varphi \qquad y_2' = y_2 + z_2 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \sin\varphi$$

9. Man führe mit Hülfe vorstehender Formeln den Nachweis, dafs die Ausdrücke (49.$_3$) mit den in Aufgabe 7 für den Affinitätspunkt aufgestellten identisch sind.

Aufl. Es ist:

$$x_2 x_1' - x_1 x_2' = (x_2 z_1 - x_1 z_2) \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos\varphi$$

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 + (z_2 - z_1) \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos\varphi$$

daher:

$$\frac{x_2 x_1' - x_1 x_2'}{x_2' - x_1' - (x_2 - x_1)} = \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{z_2 - z_1}$$

Der Nachweis für die $y$ wird auf gleiche Art geliefert.

10. Was wird aus den Coëfficienten der Formeln (49.$_3$), wenn die in den beiden letzten Aufgaben aufgestellten Formeln benutzt werden?

Antw. Es wird:

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = 1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos\varphi = \frac{1}{\cos c}$$

wenn man bedenkt, dafs ist:

$$z_2 - z_1 = l \sin c \qquad l' = l \cos c$$
$$x_2 - x_1 = l' \cos \varphi$$

Ebenso wird:

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} = 1 + \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} tg \frac{c}{2} \sin \varphi = \frac{1}{\cos c}$$

und

$$\frac{x_2 x_1' - x_1 x_2'}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1} tg \frac{c}{2} \cos \varphi = z_0''' tg \frac{c}{2} \cos \varphi$$
$$\frac{y_2 y_1' - y_1 y_2'}{y_2 - y_1} = \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{y_2 - y_1} tg \frac{c}{2} \sin \varphi = z_0'' tg \frac{c}{2} \sin \varphi$$

so dafs die Formeln folgende einfache Gestalt erhalten:

$$x' = \frac{1}{\cos c} x + z_0''' tg \frac{c}{2} \cos \varphi$$
$$y' = \frac{1}{\cos c} y + z_0'' tg \frac{c}{2} \sin \varphi$$

---

# VI. Die Raumgerade.

## 53.

**Gleichung der Geraden.** Jede Gerade kann aufgefafst werden als der Inbegriff aller Punkte, welche auf ihr liegen. Um die Gleichung derselben aufzustellen, hat man eine allgemeine Eigenschaft der zu ihr gehörigen Punkte, also eine solche Eigenschaft, welche allen Punkten derselben ohne Ausnahme zukommt, durch die Coordinaten der letzteren algebraisch auszudrücken. Eine solche allgemeine Eigenschaft ist die, dafs wenn man die Punkte der Raumgeraden auf die Coordinatenaxen projiciert, auf letzteren Punktreihen entstehen, die zueinander affin sind. Es sind also die Gleichungen (9), (10) und (11) in (**50**) die Gleichungen der Geraden $G'$, und ebenso (**50**.$_{12}$) die Gleichungen der Geraden $G$.

Eine weitere allgemeine Eigenschaft der Punkte der Geraden ist in (**41**.$_3$) ausgesprochen, nämlich:

Die Summe oder die Differenz der Entfernungen eines beliebigen Punktes einer Geraden von zwei auf ihr gelegenen festen Punkten, ist gleich der Entfernung dieser letzteren.

Um diesen Satz in ein algebraisches Gewand zu kleiden, seien $(a_1, b_1, c_1)$ und $(a_2, b_2, c_2)$ die beiden festen Punkte $P_1$ und $P_2$, $(x, y, z)$ ein beweglicher Punkt $P$, dann sind die Entfernungen, um welche es sich handelt, beziehungsweise:

$$\overline{P_1 P} \equiv r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2}$$
$$\overline{P_2 P} \equiv r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$
$$\overline{P_1 P_2} \equiv d = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

Die Wurzelgröfsen sind auch hier als reine Zahlen aufzufassen. Die algebraische Form des obigen Satzes ist daher durch folgende drei Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{lll} r_1 + r_2 = d & & r_1 + r_2 - d = o \\ r_1 - r_2 = d & \text{oder} & r_1 - r_2 - d = o \quad . \quad . \quad (1) \\ r_2 - r_1 = d & & r_2 - r_1 - d = o \end{array}$$

Es genügen die Coordinaten aller Punkte, welche innerhalb der Strecke $d$ liegen, der Gleichung:

$$r_1 + r_2 - d = o$$

und die Coordinaten aller Punkte aufserhalb der Strecke $d$ der einen oder der andern von den Gleichungen:

$$r_1 - r_2 - d = o$$
$$r_2 - r_1 - d = o$$

Man erkennt aber unschwer, dafs die drei Gleichungen (1) übereinstimmen, wenn sie von den Irrationalitäten befreit werden. Denn man erhält durch wiederholtes Quadrieren einer jeden Gleichung die Folgende:

$$4\, r_1^{\,2}\, r_2^{\,2} - (d^2 - r_1^{\,2} - r_2^{\,2})^2 = o \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es genügen also die Coordinaten aller Punkte der Geraden,

mögen dieselben nun innerhalb oder aufserhalb der Strecke $d$ liegen, dieser Gleichung und wir sagen daher, dieselbe stelle die Gerade dar. Die Gleichung (2) enthält, wenn man die oben aufgestellten Ausdrücke für $r_1$, $r_2$ und $d$ in die linke Seite derselben einsetzt, die Coordinaten der beiden festen Punkte als Constante und die des beweglichen Punktes als Variabele. Wird nun der Einfachheit wegen der feste Punkt $(a_1, b_1, c_1)$ als mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfallend angenommen, dann ist:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$d = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$

und wie oben:

$$r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

Die Gleichung (2) nimmt durch Substitution dieser Ausdrücke die Form an:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a_2 x - b_2 y - c_2 z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2]$$

oder:

$$(x^2 + y^2 + z^2)[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2] - [x(x - a_2) + y(y - b_2) + z(z - c_2)]^2 = o \quad . \quad (3)$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat die Form:

$$(p^2 + q^2 + r^2) \cdot (p'^2 + q'^2 + r'^2) - (pp' + qq' + rr')^2$$

und diese reduciert sich, wie leicht nachzuweisen ist, auf die Summe der drei Quadrate:

$$(pq' - qp')^2 + (qr' - rq')^2 + (rp' - pr')^2$$

Nach diesem Satze ist somit die reducierte Form der Gleichung:

$$(b_2 x - a_2 y)^2 + (c_2 y - b_2 z)^2 + (a_2 z - c_2 x)^2 = o \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Gleichung kann für reelle Werte von $x$, $y$, $z$ nur dann befriedigt werden, wenn dieselben gleichzeitig den drei Gleichungen:

$$b_2 x - a_2 y = o$$
$$c_2 y - b_2 z = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$a_2 z - c_2 x = o$$

entsprechend gewählt werden, denn die Summe dreier Quadrate kann nur dann Null sein, wenn jedes Quadrat für sich verschwindet. Die Gleichungen (5) sagen daher dasselbe aus, was ihre concentrierte Form (4) aussagt, und wir können also jetzt mit vollem Rechte sagen, die Gleichungen (5) stellen die Gerade dar, welche durch den Coordinatenanfang und durch den Punkt $(a_2, b_2, c_2)$ bestimmt ist.

Betrachten wir zunächst die erste der Gleichungen (5):

$$b_2 x - a_2 y = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Sie enthält die Coordinaten $a_2$, $b_2$ des festen Punktes $P_2$, als Constante und die $x$ und die $y$ Coordinate des beweglichen Punktes $P$ der Raumgeraden als Variabele und zwar in linearer Weise. Dieselbe verlangt, dafs man alle Raumpunkte aufsuchen soll, für welche das Verhältnis der $y$ zur $x$ Coordinate gegeben ist durch:

$$\frac{x}{y} = \frac{b_2}{a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6^a)$$

Die Gleichung stellt also eine zur $xy$ Ebene senkrechte Ebene dar. Da ferner die Gleichung durch die Coordinaten der festen Raumpunkte $(o, o, o)$ und $(a_2, b_2, c_2)$ befriedigt wird, so geht die Ebene durch diese beiden Punkte und enthält folglich auch die durch sie bestimmte Raumgerade. Setzt man nämlich an die Stelle von $x$ und $y$ die Coordinatenausdrücke:

$$x = \frac{\lambda a_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{\lambda b_2}{1 + \lambda}$$

in welcher Form sich nach (28) die $x$ und $y$ Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden darstellen lassen, so wird der (6) genügt, welches auch der Wert von $\lambda$ sein mag, wie man leicht findet. Die (6) ist also die Gleichung der projicierenden Ebene der Raumgeraden auf die $xy$ Ebene.

Eine gleiche Überlegung zeigt, dafs die in $y$ und $z$ lineare Gleichung:

$$c_2 y - b_2 z = o \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (7)$$

die Gleichung der projicierenden Ebene der Raumgeraden auf die $zy$ Ebene und dafs;

$$a_2 z - c_2 x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die Gleichung der projicierenden Ebene auf die $xz$ Ebene ist.

Eine Gerade wird also analytisch dargestellt durch die Gleichungen ihrer projicierenden Ebenen.

Multipliciert man die linken Seiten der Gleichungen (5) beziehungsweise mit $c_2$, $a_2$, $b_2$ und addiert die Produkte, so verschwindet die sich ergebende Summe identisch d. h. wenn man die in dem Ausdruck:

$$c_2 (b_2 x - a_2 y) + a_2 (c_2 y - b_2 z) + b_2 (a_2 z - c_2 x) \quad . \quad . \quad (9)$$

vorgeschriebenen Operationen ausführt, so ist das Ergebnis derselben Null, ohne Rücksicht auf die Werte der Grössen $a_2$, $b_2$, $c_2$, $x$, $y$, $z$.

Es ist dies ein Beweis dafür, dafs die Gleichungen (5) von einander abhängig sind, und dafs also die eine durch die beiden anderen sich in linearer Weise zusammensetzen lässt. Die geometrische Bedeutung dieser Bemerkung ist in dem Satze enthalten:

> Eine Raumgerade ist durch zwei ihrer projicierenden Ebenen im Allgemeinen vollständig bestimmt.

Es sind also auch zur analytischen Darstellung der Geraden nur die Gleichungen von zwei ihrer projicierenden Ebenen erforderlich.

Wenn

$$Ax + By = o$$
$$A_1 y + B_1 z = o$$

die Gleichungen dieser Ebenen sind, so hat die Gleichung der dritten projicierenden Ebene die Form:

$$A_2 z + B_2 x = o$$

Nach der vorhin gemachten Bemerkung (9) mufs dieselbe aber auch die Form haben:

$$\lambda (Ax + By) + \mu (A_1 y + B_1 z) = o$$

wo $\lambda$ und $\mu$ noch zu bestimmende Zahlen sind. Es mufs daher sein:

$$\lambda (Ax + By) + \mu (A_1 y + B_1 z) \equiv A_2 z + B_2 x$$

für alle Werte von $x$, $y$, $z$. Man hat also:

$$\lambda A = B_2$$
$$\lambda B + \mu A_1 = o$$
$$\mu B_1 = A_2$$

zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda : \mu$ und von $A_2$, $B_2$. Man findet:

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{A_1}{B} = \frac{B_2}{A_2}\ \frac{B_1}{A}$$

Daher ist

$$B_2 = \varrho\, A A_1$$
$$A_2 = \varrho\, B B_1$$

und folglich

$$B B_1 z - A A_1 x = o$$

die Gleichung der dritten projicierenden Ebene.

Die drei projicierenden Ebenen einer Raumgeraden schneiden die Projectionsebenen in drei Geraden, welche man die Projectionen der Raumgeraden nennt.

Für alle Punkte der Projection in der $xy$ Ebene bestehen die Gleichungen:

$$z = o \qquad b_2 x - a_2 y = o$$

Es sind dies also die Gleichungen jener Projection. Ebenso sind:

$$y = o \qquad c_2 y - b_2 z = o$$

und

$$z = o \qquad a_2 z - c_2 x = o$$

die Gleichungen der beiden andern Projectionen der Raumgeraden.

Um die Gleichungen der Geraden, welche durch zwei feste Punkte gegeben ist, für eine beliebige Lage der letzteren abzuleiten, ist es notwendig, einen andern Weg einzuschlagen als den vorigen, wenn man weitläufige Rechnungen vermeiden will. Statt nämlich die Gerade durch eine geometrische allgemeine Eigenschaft ihrer Punkte zu definieren, können wir auch eine analytische allgemeine Eigenschaft ihrer Punkte benützen. Nach (28) stellen sich nämlich die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der

Verbindungslinie der beiden festen Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ dar durch:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad . \quad (10)$$

Man erhält hieraus nach (**29**) alle Punkte der durch die zwei Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ bestimmten Geraden, wenn man dem $\lambda$ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ erteilt, und zwar entspricht jedem Werte des $\lambda$ nur ein einziger Punkt der Geraden, und umgekehrt, jedem Punkte der Geraden nur ein einziger Wert des $\lambda$. Die drei Werte von $\lambda$, welche sich durch Auflösung der in $\lambda$ linearen Gleichungen (10) ergeben:

$$\lambda = -\frac{x - x_1}{x - x_2} \quad \lambda = -\frac{y - y_1}{y - y_2} \quad \lambda = -\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

sind also einander gleich, wenn der Punkt $x, y, z$ auf der Verbindungsgeraden der Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ und $(x_2, y_2, z_2)$ liegt. Die Gleichungen:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

bestehen daher für alle Punkte $x, y, z$ jener Verbindungsgeraden und nur für diese. Sie lauten in entwickelter Form:

$$\begin{aligned} x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - y_1 x_2 &= o \\ y(z_2 - z_1) - z(y_2 - y_1) + y_1 z_2 - z_1 y_2 &= o \quad . \quad (11) \\ z(x_2 - x_1) - x(z_2 - z_1) + z_1 x_2 - x_1 z_2 &= o \end{aligned}$$

Es sind dies, wie man leicht sieht, die Gleichungen der projicierenden Ebenen der Geraden. Denn jede Gleichung enthält nur zwei Veränderliche und wird befriedigt durch die Coordinaten der beiden festen Punkte. Aus dem ersten Grunde steht die Ebene senkrecht auf einer Coordinatenebene und aus dem zweiten geht sie durch die Raumgerade. In Verbindung mit den Gleichungen der Coordinatenebenen $z = o$, $y = o$, $x = o$ stellen die drei Gleichungen auch die drei Projectionen der Raumgeraden dar.

Ein anderer Weg, die Gleichung einer Geraden zu erhalten, ergibt sich aus der unter (**26.7**) angegebenen zweiten Bestimmungsweise der Punkte einer Raumgeraden. Nach derselben sind nämlich

die Coordinaten eines Punktes der Geraden, welche durch den festen Punkt $(a, b, c)$ und durch ihre Neigungswinkel $\alpha, \beta, \gamma$ gegen die Axen gegeben ist, wenn der Abstand desselben von dem festen Punkte den Wert $p$ hat, gegeben durch:

$$x = a + p\cos\alpha$$
$$y = b + p\cos\beta$$
$$z = c + p\cos\gamma$$

Die Elimination von $p$ aus je zweien dieser Gleichungen liefert die Gleichungen der projicierenden Ebenen der Geraden in der Form:

$$\begin{aligned}(x-a)\cos\beta - (y-b)\cos\alpha &= o\\ (y-b)\cos\gamma - (z-c)\cos\beta &= o \quad . \quad . \quad . \quad (12)\\ (z-c)\cos\alpha - (x-a)\cos\gamma &= o\end{aligned}$$

und es sind dies also zusammen mit den Gleichungen:

$$z = o \qquad x = o \qquad y = o$$

auch die Gleichungen der Projectionen der Geraden.

## 54.

**Die Gleichungen der Raumgeraden in der allgemeinen Form.**

Die Gleichungen:

$$Ax + By + C = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$A_1x + B_1z + C_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ Constante sind, stellen jede für sich eine Ebene dar. Die erste dieser Ebenen steht senkrecht auf der $xy$ Ebene, die zweite senkrecht auf der $xz$ Ebene.

Die erste Gleichung repräsentiert nämlich bekanntlich eine Gerade auf der $xy$ Ebene, wenn man unter $x$, $y$ nur Coordinaten von Punkten der letzteren versteht, und die zweite Gleichung ist die einer Geraden auf der $xz$ Ebene, wenn man nur die Punkte dieser Ebene bei der Interpretation der Gleichung benützt. Errichtet man jetzt in einem Punkte $P_1$ der ersten Geraden die Perpendikel nach beiden Seiten der $xy$ Ebene, so hat jeder Punkt $P$ in diesen mit seinem Fufspunkte $P_1$ die $x$ und $y$

Coordinate gemein. Die Coordinaten aller Punkte jener Perpendikel genügen also der Gleichung (1), da die Coordinaten des Punktes $P_1$ derselben genügen. Das Gleiche läfst sich sagen von den Punkten aller andern in den verschiedenen Punkten der Geraden (1) errichteten Perpendikel. Diese Perpendikel bilden aber in ihrer Gesamtheit eine zur $xy$ Ebene senkrechte Ebene, welche die erstere in der Geraden (1) schneidet. Die Gleichung (1) stellt daher, wenn man aufser den Punkten der $xy$ Ebene noch andere Punkte des Raumes bei der Interpretation derselben zuläfst, die Gesamtheit aller Punkte jener zur $xy$ Ebene senkrechten Ebene dar. Sie ist also die Gleichung dieser Ebene. Eine ähnliche Überlegung lehrt, dafs die Gleichung (2) eine Ebene repräsentiert, welche senkrecht zur $xz$ Ebene ist, wenn man aufser den Punkten der letzteren auch noch andere Raumpunkte zur Interpretation der Gleichung heranzieht. Die Ebenen (1) und (2) schneiden sich in einer Geraden im Raume; ihren beiden Gleichungen wird also genügt durch die Coordinaten der Punkte dieser Geraden und nur durch diese; beide Gleichungen zusammengenommen stellen somit diese Gerade dar. (Fig. 48.)

Wenn man also jetzt die Frage stellt nach dem Orte aller Punkte, deren Coordinaten einer linearen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen genügen, so mufs diese Frage damit beantwortet werden, dafs alle diese Punkte auf einer Ebene liegen, welche senkrecht zu derjenigen Ebene des Coordinatensystems ist, die ihren Namen nach den Veränderlichen trägt, welche in der linearen Gleichung vorkommen.

Eine jede lineare Gleichung mit zwei Veränderlichen stellt also eine zu einer Coordinatenebene senkrechte Ebene dar, wenn ihre Veränderlichen Coordinaten eines Raumpunktes bedeuten.

Die Gerade, in welcher jene Ebene die betreffende Coordinatenebene schneidet, ist dann analytisch repräsentiert durch dieselbe lineare Gleichung, zusammen mit der Gleichung der Coordinatenebene.

Die Gleichung:

$$\alpha x + \gamma z + \delta = o$$

repräsentiert also eine Ebene senkrecht zur $xz$ Ebene, die Gleichungen:

$$\alpha x + \gamma z + \delta = o \qquad y = o$$

dagegen repräsentieren eine Gerade in der $xz$ Ebene.

Zwei lineare Gleichungen, in welchen dieselben Veränderlichen vorkommen, stellen gleichfalls eine Gerade dar, z. B. die Gleichungen:

$$Ax + Bz + D = o \qquad Px + Qz + R = o$$

Die Gerade steht in diesem Falle senkrecht zur $xy$ Ebene, und im folgenden Falle:

$$Py + Rz + S = o \qquad My + Nz + L = o$$

senkrecht zur $yz$ Ebene.

Liegen drei lineare Gleichungen mit je zwei Veränderlichen vor, so stellt eine jede von ihnen eine zu einer Coordinatenebene senkrechte Ebene dar. Diese drei Ebenen schneiden sich im Allgemeinen in einem Punkte. Die Coordinaten dieses Punktes genügen den drei Gleichungen gleichzeitig, und werden folglich erhalten, wenn man die letzteren nach $x$, $y$, $z$ auflöst.

Sind

$$\begin{aligned} ax + by + d &= o \\ a_1x + c_1z + d_1 &= o \qquad \ldots\ldots (3) \\ b_2y + c_2z + d_2 &= o \end{aligned}$$

die Gleichungen der drei Ebenen, dann ergeben sich für $x$, $y$, $z$ endliche Lösungen, wenn die Determinante

$$-ab_2c_1 - a_1bc_2 \qquad \ldots\ldots (4)$$

nicht verschwindet. Die Ebenen (3) schneiden sich dann in einem Punkte, dessen Coordinaten sind:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_2bc_1 - db_2c_1 + d_1bc_2}{ab_2c_1 + a_1bc_2} \\ y &= \frac{ad_1c_2 - ad_2c_1 - a_1dc_2}{ab_2c_1 + a_1bc_2} \qquad \ldots\ldots (5) \\ z &= \frac{a_1b_2d - ab_2d_1 - a_1bd_2}{ab_2c_1 + a_1bc_2} \end{aligned}$$

Ist dagegen der Ausdruck (4) gleich Null, während

$$-ab_2d_1 - a_1bd_2 + a_1b_2d, \quad ad_1c_2 - ad_2c_1 - a_1dc_2,$$
$$-db_2c_1 - d_1bc_2 + d_2bc_1$$

von Null verschieden sind, so werden die Coordinatenausdrücke (5) unendlich grofs; dagegen behalten die Verhältnisse der Coordinaten endliche Werte. Dieselben sind:

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{ab_2d_1 + a_1bd_2 - a_1b_2d}{db_2c_1 + d_1bc_2 - d_2bc_1} = m \\ \frac{y}{x} &= \frac{ad_2c_1 - ad_1c_2 + a_1dc_2}{db_2c_1 + d_1bc_2 - d_2bc_1} = n \end{aligned} \quad \ldots \quad (6)$$

Es lassen sich also die $y$ und $z$ Coordinaten des Schnittpunktes der Ebenen (3), im Falle der Ausdruck (4) verschwindet, darstellen in der Form:

$$z = mx \qquad y = nx \qquad \ldots \quad (7)$$

Der Punkt, dessen Coordinaten:

$$x = y = z = \infty$$

sind, liegt also auf der Geraden (7) in unmefsbar grofser Entfernung vom Ursprunge des Coordinatensystems; es ist der unendlich ferne Punkt derselben. Die Gerade (7) zeigt also die Richtung an, in welcher man den unendlich fernen Schnittpunkt der Ebenen (3) zu suchen hat, wenn (4) gleich Null ist.

Da dieser Schnittpunkt nicht in endlicher Entfernung vom Ursprunge des Coordinatensystems liegt, so schneiden sich die drei Geraden, in welchen sich die Ebenen (3) paarweise durchsetzen, nicht, und sind daher zu einander parallel. Die Richtung dieser Parallelen ist gegeben durch die Gerade (7).

Verschwinden die Zähler und Nenner der Coordinatenausdrücke (5), sind also die Coëfficienten der Gleichungen (3) durch die Bedingungen verbunden:

$$\begin{aligned} a_1bc_2 + ab_2c_1 &= o \\ ab_2d_1 + a_1bd_2 - a_1b_2d &= o \\ ad_1c_2 - ad_2c_1 - a_1dc_2 &= o \\ bc_1d_2 - bd_1c_2 - b_2c_1d &= o \end{aligned} \quad \ldots \quad (8)$$

dann nehmen jene Coordinatenausdrücke die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Die drei Ebenen haben also in diesem Falle unendlich

viele Punkte mit einander gemein, die, wie wir sogleich sehen werden, alle auf einer Geraden liegen.

Multipliciert man nämlich die erste Bedingungsgleichung (8) mit $d_1$, die zweite mit $c_1$, und addiert die Produkte, so ergibt sich die vierte Bedingungsgleichung; multipliciert man dagegen die erste mit $d_2$, die zweite mit $c_2$, so ergibt sich die dritte Bedingungsgleichung. Es genügt also für das Unbestimmtwerden der Coordinatenausdrücke (5), dafs die beiden ersten Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Löst man dieselben nach $b_2$, $c_2$ und $d_2$ auf, so ergeben sich für die Verhältnisse dieser Coëfficienten die Werte:

$$\frac{b_2}{c_2} = -\frac{a_1 b}{a c_1}$$

$$\frac{b_2}{d_2} = \frac{a_1 b}{a_1 d - a d_1}$$

Es ist also, wenn $\varrho$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$b_2 = \varrho a_1 b$$
$$c_2 = -\varrho a c_1$$
$$d_2 = \varrho (a_1 d - a d_1)$$

Setzt man diese Werte in die dritte der Gleichungen (3) ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$a_1 b y - a c_1 z + a_1 d - a d_1 = o$$

Dasselbe Resultat ergibt sich aber, wenn man die erste der Gleichungen (3) mit $a_1$, die zweite mit $a$ multipliciert, und die Produkte von einander subtrahiert. Es ist also die dritte Gleichung, im Falle die Bedingungsgleichungen (8) bestehen, eine lineare Combination der beiden ersten von einander unabhängigen Gleichungen.

Man hat daher den Satz:

> Wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichungen (3) die Bedingungen (8) statt haben, so ist eine jede dieser Gleichungen eine lineare Combination der beiden andern.

Das geometrische Gegenstück dieses algebraischen Satzes wird durch folgende Überlegung gewonnen. Die beiden ersten Gleichungen

(3) stellen zwei verschiedene Ebenen dar. Dieselben schneiden sich daher notwendig in einer Geraden. Da nun die dritte Gleichung ebenfalls eine Ebene darstellt, so hat dieselbe, wenn die Bedingungen (8) erfüllt sind, mit jeder der beiden ersten Ebenen dieselben unendlich vielen Punkte gemein. Sie mufs also, da sie, wie aus den Gleichungen (3) ersichtlich, mit keiner der beiden erstgenannten Ebenen zusammenfällt, notwendig durch die Schnittlinie der letzteren hindurch gehen. Daher der analytisch-geometrische Satz:

> Die Ebenen (3) schneiden sich in ein und derselben Geraden, wenn zwischen den Coëfficienten dieser Gleichungen die Bedingungen (8) bestehen, oder wenn sich jede dieser Gleichungen aus den beiden andern linear zusammensetzen läfst.

Wenn in den Gleichungen (3)

$$d = d_1 = d_2 = o$$

ist, so sind die drei letzten der Gleichungen (8) von selbst erfüllt. Das Bestehen der ersten Gleichung (8) sagt also dann aus, dafs die drei Gleichungen

$$a\,x + b\,y = o, \qquad a_1\,x + c_1\,z = o, \qquad b_2\,y + c_2\,z = o$$

die projicierenden Ebenen einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden darstellen.

## 55.

**Verwandlung der verschiedenen Gleichungsformen einer Raumgeraden ineinander.** Die Gleichungen (**53**.$_{12}$) lassen sich auch in der fortlaufenden Proportion schreiben:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In diesen Gleichungen sind die Bestimmungsstücke der Geraden, nämlich die Coordinaten des festen Punktes $(a, b, c)$ und die Winkel, welche die Gerade mit den Axen bildet, so enthalten, dafs sie ohne Weiteres daraus abgelesen werden können. Man

nennt sie deshalb die Normalform der Gleichung einer Geraden. Unsere Aufgabe wird nun sein, auch die übrigen aufgestellten Gleichungsformen der Geraden auf die Normalform zu bringen. Um dies für die Gleichungen (**53.**$_{11}$) zu bewerkstelligen, benützen wir (**26.**$_{1}$), und setzen demgemäs:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= l \cos \alpha \\ y_2 - y_1 &= l \cos \beta \\ z_2 - z_1 &= l \cos \gamma \end{aligned}$$

in die Gleichungen (**53.**$_{11}$), nachdem wir sie vorher auf die Form gebracht haben:

$$\begin{aligned} (x - x_1)\ (y_2 - y_1) - (y - y_1)\ (x_2 - x_1) &= o \\ (y - y_1)\ (z_2 - z_1) - (z - z_1)\ (y_2 - y_1) &= o \quad . \quad . \quad (2) \\ (z - z_1)\ (x_2 - x_1) - (x - x_1)\ (z_2 - z_1) &= o \end{aligned}$$

Dann hat man statt ihrer die gleichbedeutenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x - x_1)\ \cos \beta &= (y - y_1)\ \cos \alpha \\ (y - y_1)\ \cos \gamma &= (z - z_1)\ \cos \beta \\ (z - z_1)\ \cos \alpha &= (x - x_1)\ \cos \gamma \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich dann die fortlaufende Proportion (1).

Dividiert man die Gleichungen (2) mit

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

so ergibt eine Vergleichung mit den (1), unter Beachtung von (**26.**$_{5}$), den folgenden Satz:

> Man bringt die Gleichungen (**53.**$_{11}$) auf die Normalform durch Division mit
>
> $$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Um die Gleichungen (**54.**$_{1}$) und (**54.**$_{2}$) auf die Normalform zu bringen, dividiert man die linke Seite der ersten Gleichung mit $-B$ und die linke Seite der zweiten Gleichung mit $-B_1$ und setzt:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{A}{B} \qquad b = -\frac{C}{B} \\ a_1 &= -\frac{A_1}{B_1} \qquad b_1 = -\frac{C_1}{B_1} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^a)$$

dann nehmen jene beiden Gleichungen die für die Rechnung bequemere Gestalt an:

$$y = a\,x + b \qquad z = a_1\,x + b_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dieselben lassen sich auch schreiben:

$$\frac{y - b}{a} = \frac{z - b_1}{a_1} = \frac{x - o}{1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

woraus ersichtlich ist, dafs die durch diese Gleichungen dargestellte Gerade durch den Punkt $(o, b, b_1)$ geht. Es hat also die Normalform der Gleichung der Geraden das Aussehen:

$$\frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - b_1}{\cos\gamma} = \frac{x - o}{\cos\alpha}$$

Durch Vergleichung mit (4) ergeben sich zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma$ die Beziehungen:

$$\cos\alpha = \mu \qquad \cos\beta = \mu\,a \qquad \cos\gamma = \mu\,a_1 \quad . \quad . \quad (5)$$

wo $\mu$ ein noch zu bestimmender Proportionalitätsfactor ist. Zur Berechnung desselben quadriert man die drei Gleichungen (5) und addiert sie; dann ergibt sich:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a_1^2 + 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und folglich ist, wenn man diesen Wert in die (5) einsetzt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{a_1}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}} \quad . \quad . \quad (7)$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel in (6) und (7) ist so zu wählen, dafs $\cos\gamma$ positiv wird, und mufs demgemäs mit dem Vorzeichen von $a_1$ übereinstimmen.

Es ist also jetzt:

$$\frac{(y - b)\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}}{a} = \frac{(z - c)\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}}{a_1} =$$
$$= \frac{x\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}}{1} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die Normalform der Gleichungen (3) einer Raumgeraden und also auch die Normalform der Gleichungen an der Spitze von (**54**), wenn man statt $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ ihre Werte ($3^a$) setzt.

## 56.

**Winkel zweier Geraden.** Die Gleichungen der beiden Geraden seien in der Form (**55.**$_3$) gegeben:

$$\begin{aligned} y &= Ax + B & \qquad y &= ax + b \\ z &= A_1 x + B_1 & \qquad z &= a_1 x + b_1 \end{aligned} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

dann hat man nach der vorigen Nummer:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}} & \qquad \cos\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}} \\ \cos\beta &= \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}} & \qquad \cos\beta_1 &= \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{A_1}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}} & \qquad \cos\gamma_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}} \end{aligned} \quad . \quad (2)$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel sind, welche die erste Gerade mit den Axen bildet, und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die entsprechenden Neigungswinkel der zweiten Geraden gegen die Axen.

Den Wurzeln sind die Vorzeichen von $A_1$, beziehungsweise $a_1$, zu geben. Setzt man diese Werte in die Formel (**33.**$_2$) für den Cosinus des Neigungswinkels $v$ zweier Raumgeraden, dann ergibt sich nach einer leichten Reduction:

$$\cos v = \frac{1 + Aa + A_1 a_1}{\sqrt{1 + a^2 + a_1^2}\ \sqrt{1 + A^2 + A_1^2}} \quad . \; . \quad (3)$$

wo die beiden Wurzeln selbstverständlich dieselben Vorzeichen haben wie in (2). Verschwindet der Zähler des vorstehenden Ausdrucks, dann ist $v = 90^0$; die zwei Geraden (1) stehen also senkrecht auf einander, wenn

$$1 + Aa + Aa_1 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ist.

Für manche Fälle ist es vorteilhafter den Sinus des Win-

kels zu haben, welchen zwei Gerade miteinander einschliefsen, statt des Cosinus. Um ihn zu berechnen, erinnere man sich an

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$$

und setze aus (3) den Wert für $\cos v$ in die rechte Seite ein; dann findet sich leicht:

$$\sin v = \frac{(A - a)^2 + (A_1 - a_1)^2 + (a A_1 - a_1 A)^2}{(1 + a^2 + a_1^2)\,(1 + A^2 + A_1^2)} \quad . \quad (5)$$

Zwei Gerade, deren Neigungswinkel Null ist, sind zu einander parallel, oder sie fallen zusammen. In letzterem Falle haben sie dann auch noch einen Punkt gemein. Da aber für $v = o$ auch $\sin v$ gleich Null ist, so sind die Bedingungsgleichungen dafür, dafs die Geraden (1) parallel zu einander sind, nach (5) die folgenden:

$$A = a \qquad A_1 = a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

denn, wenn dieselben erfüllt sind, verschwindet der Zähler des Ausdrucks (5) für $\sin v$. Die zwei Bedingungsgleichungen (6) können auch dahin gedeutet werden, dafs die Projectionen der Raumgeraden zu einander parallel sind. Man kann daher den Parallelismus zweier Raumgeraden definieren, wie folgt:

> Zwei Raumgerade sind parallel, wenn ihre gleichnamigen Projectionen zu einander parallel sind.

Wenn also jetzt die Gleichungen der Projectionen einer Raumgeraden auf die $xy$ und die $xz$ Ebene gegeben sind in der allgemeinen Form:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= o & ax + bz + c &= o \\ A_1 x + B_1 y + C_1 &= o & a_1 x + b_1 z + c_1 &= o \end{aligned}$$

dann sind die Raumgeraden, nach dem so eben ausgesprochenen Satze, zu einander parallel unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} AB_1 - BA_1 &= o \\ ab_1 - ba_1 &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

## 57.

**Schnittpunkt zweier Geraden.** Zwei Gerade im Raume schneiden sich im Allgemeinen nicht. Schneiden sie sich aber, so geschieht dies nur in einem einzigen Punkte. Da dieser Punkt sowohl auf der einen als auf der andern Geraden liegt, so müssen die Coordinaten desselben sowohl den Gleichungen der ersten Geraden als auch den Gleichungen der zweiten Geraden genügen. Da aber die Zahl dieser Gleichungen die der Unbekannten um eins übersteigt, so ist die gleichzeitige Existenz dieser Gleichungen für dieselben Werte der Unbekannten nur dann möglich, wenn zwischen den acht Coëfficienten der vier Gleichungen jene Beziehung besteht, welche sich ergibt, wenn man $x, y, z$ aus den vier Gleichungen eliminiert. Wenn also jetzt

$$\begin{aligned} y &= ax + b & y &= Ax + B \\ z &= a_1 x + b_1 & z &= A_1 x + B_1 \end{aligned} \quad \ldots \quad (1)$$

die Gleichungen der beiden Geraden sind, dann ist die erwähnte Beziehung zwischen ihren Coëfficienten dafür, dafs sie sich schneiden, gegeben durch die Eliminationsgleichung:

$$(B - b)\,(a_1 - A_1) - (B_1 - b_1)\,(a - A) = o \quad \ldots \quad (2)$$

denn durch Gleichsetzung der beiden $y$ und ebenso der $z$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} ax + b &= Ax + B \\ a_1 x + b_1 &= A_1 x + B_1 \end{aligned} \quad \ldots \quad (3)$$

woraus durch Elimination von $x$ die (2) folgt.

Wenn die Bedingungsgleichung (2) erfüllt ist, liefern die Gleichungen (3) für $x$ denselben Wert. Durch Einsetzung desselben in das erste oder zweite Paar des Gleichungssystems (1) erhält man dann die $y$ und $z$ Coordinaten des Punktes. Es sind also die Coordinaten des Schnittpunktes der Raumgeraden (1):

$$x = \frac{B - b}{a - A} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{a\,(B - b) + b\,(a - A)}{a - A} \\ z &= \frac{a_1\,(B - b) + b_1\,(a - A)}{a - A} \end{aligned} \quad \ldots \quad (4)$$

Die Bedingungsgleichung (2) zwischen den Coëfficienten der Gleich-

ungen zweier Geraden im Raume dafür, dafs die Geraden sich schneiden, ist erfüllt, wenn:

$$A = a \text{ und } A_1 = a_1$$

ist, oder wenn man gleichzeitig hat:

$$B = b \text{ und } B_1 = b_1$$

oder

$$A = a \text{ und } B = b$$

$$B_1 = b_1 \text{ und } A_1 = a_1$$

Die in der ersten Zeile stehenden Relationen drücken nach (**56.**$_6$) den Parallelismus der beiden Geraden aus. Die Coordinaten des Schnittpunktes fallen unendlich grofs aus, die Verhältnisse derselben behalten dagegen endliche Werte:

$$\frac{z}{x} = a_1 = A_1 \qquad \frac{y}{x} = a = A$$

Es sind dies die Gleichungen einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden mit den Geraden (1) parallelen Geraden.

Die in der zweiten Reihe stehenden Bedingungsgleichungen liefern den Schnittpunkt:

$$x = o \qquad y = b = B \qquad z = b_1 = B_1$$

und somit liegt derselbe auf der $yz$ Ebene.

Für die Relationen der dritten Reihe nehmen die Coordinatenausdrücke (4) die Form $\frac{o}{o}$ an, mit Berücksichtigung von (2) aber die folgende:

$$x = \frac{B_1 - b_1}{a_1 - A_1} \qquad y = \frac{a(B_1 - b_1) + b(a_1 - A_1)}{a_1 - A_1}$$

$$z = \frac{a_1(B_1 - b_1) + b_1(a_1 - A_1)}{a_1 - A_1}$$

Die beiden Geraden haben in diesem Falle die gemeinschaftliche projicierende Ebene:

$$y = ax + b$$

wie man leicht erkennt, wenn man in den Gleichungen (1) $A = a$ und $B = b$ setzt. Endlich hat man im vierten Fall folgende Werte für die Coordinaten des Schnittpunktes:

$$x = \frac{B - b}{a - A} \qquad y = \frac{a\,(B - b) + b\,(a - A)}{a - A}$$
$$z = \frac{a_1\,(B - b) + b_1\,(a - A)}{a - A}$$

wenn man wieder (2) berücksichtigt. Beide Geraden haben dann die projicierende Ebene

$$z = a_1\,x + b_1$$

gemeinschaftlich.

In Fig. 49 und 49ª ist die graphische Darstellung des Schnittpunktes zweier Raumgeraden $g_1$ und $g_2$ gegeben.

## 58.

**Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, welche eine gegebene Gerade schneidet.** Die gegebene Gerade habe die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ z &= px + q \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Der feste Punkt liege, unbeschadet der Allgemeinheit, aber der einfacheren und anschaulicheren Darstellung wegen, in der $yz$ Ebene, und habe in dieser die Coordinaten $a$ und $a_1$. Die Gleichungen einer Geraden, welche durch den festen Punkt hindurch geht, haben dann die Form:

$$\begin{aligned} y &= \lambda x + a \\ z &= \mu x + a_1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo $\lambda$ und $\mu$ beliebige Parameter sind.

Damit nun die Gerade (2) die Gerade (1) schneide, muſs nach (**57**$_2$) die Bedingung bestehen:

$$(a - n)\,(\mu - p) - (a_1 - q)\,(\lambda - m) = o \quad \ldots \quad (3)$$

welche Parametergleichung in $\lambda$ und $\mu$ vom ersten Grade ist.

Da die Parameter $\lambda$ und $\mu$ in (2) jetzt an die Bedingung (3) gebunden sind, so gibt es einfach unendlich viele Gerade, welche durch einen festen Punkt an eine feste Gerade gelegt werden können,

Die Horizontalprojectionen aller dieser Geraden sind gebildet durch das Strahlenbüschel:

$$(y - a) - \lambda x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und die Vertikalprojectionen durch das Strahlenbüschel:

$$(z - a_1) - \mu x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Klappt man nun die $xz$ Ebene um, so, dafs die Axe $+ z$ zusammenfällt mit der Axe $- y$, dann ändert selbstverständlich durch diese Drehung die Gerade (5) ihre Lage gegen das Coordinatensystem der $xz$ nicht. Da aber die Ebene des letzteren nun zusammenfällt mit der Ebene des Coordinatensystems der $yx$, so hat man in der Gleichung (5) nach (**22**) statt $z$ zu schreiben $- y$, um die Gleichung dieses Strahlenbüschels im letzteren System zu erhalten. Dieselbe ist also:

$$(y + a_1) + \mu x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Jede der Horizontalprojectionen (4) schneidet nun ihre zugehörige Vertikalprojection (6) in einem Punkte und alle diese Punkte liegen, wenn zwischen $\lambda$ und $\mu$ die Bedingung (3) statt hat, auf einer Geraden, deren Gleichung erhalten wird, wenn man $\lambda$ und $\mu$ aus (3), (4) und (6) eliminiert. Dieselbe ist also:

$$(a - n)\,(y + a_1 + px) + (a_1 - q)\,(y - a - mx) = o \quad . \quad (7)$$

Wir können daher jetzt den Satz aussprechen:

> Die Horizontal- und die umgeklappten Vertikalprojectionen aller durch einen festen Punkt an eine feste Gerade gelegten Geraden schneiden sich in Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Um diese Gerade $\Sigma$ zu construieren, bedarf es der Kenntnis zweier Punkte derselben, also der Kenntnis der Projectionen von zwei Geraden (2). Da nun eine solche Gerade $G$ durch den festen Punkt $P$ des Raumes geht, so müssen ihre Projectionen $G'$ und $G''$ beziehungsweise durch die Projectionen $P'$ und $P''$ des Punktes $P$ gehen. Da ferner die Gerade $G$ die feste Gerade $g$ in einem Punkte $p$ schneidet, so müssen die Projectionen $G'$ und $G''$ beziehungsweise durch $p'$ und $p''$ gehen.

Wählt man also jetzt auf der Geraden $g$ (Fig. 50) zwei beliebige Punkte $p_1$ und $p_2$, und verbindet sie mit $P$, so schneiden sich die Projectionen $G_1'$, $G_1''$ und $G_2'$, $G_2''$ in zwei Punkten, welche die Gerade $\Sigma$ bestimmen, auf welcher sich alle Horizontal- und Vertikalprojectionen der Geraden $G$ schneiden. Verbindet man daher irgend einen Punkt $\pi$ der Geraden $\Sigma$ mit $P'$ und $P''$, so erhält man die Horizontal- und Verticalprojection einer Geraden $G$, und durch Änderung der Lage des Punktes $\pi$, die aller Geraden $G$. Es ist ferner ersichtlich, dafs, wenn die Horizontalprojectionen aller Geraden $G$ und $\Sigma$ gegeben sind, die Vertikalprojectionen ohne Weiteres gezogen werden können.

Es genügt auch zur Construction der Geraden $\Sigma$, dafs die Punkte der Geraden $g$ gegeben seien, in welchen diese die Coordinatenebenen durchsetzt. Denn die drei Geraden $G$, welche $P$ mit den Durchstofspunkten verbinden, liefern drei Punkte von $\Sigma$. Auch ist klar, dafs die durch $P$ parallel mit $g$ gezogene Gerade ebenfalls einen Punkt von $\Sigma$ liefert; denn die (3) ist erfüllt für $\lambda = m$ und $\mu = p$. Die Gleichungen

$$y = mx + a$$
$$z = px + a_1$$

stellen aber eine zu der (1) parallele Gerade dar.

Wir werden später zeigen, dafs die Gerade $\Sigma$ die Affinitätsaxe der Horizontal- und Vertikalprojection des von den Punkten $P$, $p_1$ und $p_2$ gebildeten Dreiecks ist, und dafs daher $\Sigma$ durch den Schnittpunkt von $g'$ und $g''$ gehen mufs. Hat man also aufserdem noch einen Punkt von $\Sigma$, so läfst sich diese Gerade zeichnen. Als zweiten Punkt wählt man nun passend den Schnittpunkt der Strahlen, die von $P'$, beziehungsweise $P''$, parallel mit $g'$, beziehungsweise $g''$, gezogen werden können. Es sind dies die Projectionen des Strahls, der von $P$ an den unendlich fernen Punkt der Geraden $g$ geht.

## 59.

**Constante in den Gleichungen einer Geraden.** Die Gleichungen ($\mathbf{53}._{11}$) einer Geraden enthalten als Constante nur die Coordinaten der sie bestimmenden festen Punkte. Die Zahl der Con-

stanten ist also sechs. Die Gleichungen (**53**.$_{12}$) dagegen enthalten nur fünf Constante, nämlich die drei Coordinaten des festen Punktes und zwei von einander unabhängige Winkel, indem der dritte Winkel nach (**25**.$_3$) durch die beiden andern bestimmt ist. Die Gleichungen (**54**.$_1$) und (**54**.$_2$), beziehungsweise (**55**.$_3$), endlich enthalten nur vier Constante.

Da nun die Constanten in den Gleichungen einer Geraden die letztere gegen das Coordinatensystem festlegen, so müssen die sechs Constanten in (**53**.$_{11}$) den fünf in (**53**.$_{12}$) und den vier in (**55**.$_3$) äquivalent sein. Es müssen sich also jene sechs, beziehungsweise fünf Constanten auf vier reducieren lassen.

In der That hat man nach (**26**.$_1$) und (**34**):

$$x_2 - x_1 = l\cos\alpha; \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = \triangle \cos\gamma$$
$$y_2 - y_1 = l\cos\beta; \quad y_1 z_2 - y_2 z_1 = \triangle \cos\alpha$$
$$z_2 - z_1 = l\cos\gamma; \quad z_1 x_2 - z_2 x_1 = \triangle \cos\beta$$

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichungen (**53**.$_{11}$) erhalten dieselben nunmehr die Constanten $l$, $\triangle$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, deren Zahl wirklich gleich vier ist, da zwischen den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Relation (**25**.$_3$) besteht. Es bedeutet $l$ die Entfernung der beiden festen Punkte, $\triangle$ den doppelten Inhalt des von ihnen und dem Coordinatenanfangspunkt gebildeten Dreiecks und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Neigungswinkel der Geraden gegen die Axen. Es ist damit bewiesen, dafs die Coordinaten zweier festen Punkte den vier Constanten in den Gleichungen einer Geraden äquivalent sind. Da die Coordinaten zweier Punkte aber paarweise gleichbedeutend sind, so sind die Coordinaten eines Punktes zweien dieser Constanten äquivalent.

In dem Falle der Gleichungsform (**53**.$_2$) der Geraden hat man die drei Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und die drei Constanten:

$$A = a\cos\beta - b\cos\alpha; \quad B = b\cos\gamma - c\cos\beta$$
$$C = c\cos\alpha - a\cos\gamma \qquad . \quad (1)$$

Zwischen den letzteren besteht aber, wie sich leicht ergibt, wenn man dieselben beziehungsweise mit $\cos\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ multipliciert und addiert, die Beziehung:

$$A\cos\gamma + B\cos\alpha + C\cos\beta = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und zwischen den ersteren die Beziehung (**25**.$_3$). Daher sind ge-

nannte sechs Constante nur vier von einander unabhängigen Constanten äquivalent.

Wir können also jetzt sagen, dafs eine gerade Linie durch vier Stücke bestimmt ist, beziehungsweise durch vier Zahlen. Da jede dieser Zahlen einfach unendlich viele Werte annehmen kann, so ist demgemäs die Anzahl der Geraden im Raume vierfach unendlich.

Wie oben gezeigt wurde, kann ein fester Punkt im Raume als geometrisches Äquivalent von zwei solchen Zahlen aufgefafst werden. Legt man also durch einen festen Punkt eine Gerade, so werden dadurch zwei der die letzteren bestimmenden Constanten absorbiert, und es bleiben daher noch zwei Constante willkürlich. Da jede dieser Zahlen einfach unendlich viele Werte annehmen kann, so lassen sich durch einen Punkt des Raumes zweifach unendlich viele Gerade legen. Greift man unter diesen zweifach unendlich vielen Geraden alle jene heraus, welche mit einer der Coordinatenaxen einen bestimmten Winkel bilden, verwendet man also eine weitere Constante zur Bestimmung dieses Winkels, so bleibt nur noch eine Constante willkürlich; es gibt also einfach unendlich viele Gerade, welche durch einen festen Punkt gehen und mit einer der Coordinatenaxen einen unveränderlichen Winkel bilden: dieselben bilden eine Kegelfläche. Liegt der feste Punkt im Unendlichen, so heifst die Fläche Cylinderfläche.

Die Coëfficientengleichung (**56**$_4$) ist die Bedingung dafür, dafs zwei Gerade aufeinander senkrecht stehen. Die in derselben auftretenden Constanten gehören zu je zweien den beiden Quadrupeln von Zahlen an, welche die zwei Geraden gegen das Coordinatensystem festlegen. Mittelst dieser Gleichung lässt sich die eine der Constanten durch die drei übrigen ausdrücken. Es bleiben also sieben von den acht Zahlen, welche die beiden Geraden festlegen, so, dafs sie zu einander senkrecht sind, willkürlich. Verfügt man über vier von diesen sieben Constanten zur Festlegung einer Geraden, so bleiben noch drei Constanten willkürlich, und es gibt also dreifach unendlich viele Gerade, welche mit einer gegebenen Geraden einen rechten Winkel einschliefsen. Besteht zwischen den letzteren drei Constanten die Bedingung (**57**.$_2$), so wird die feste Gerade von den beweglichen geschnitten und

somit gibt es zweifach unendlich viele Geraden, welche eine gegebene feste Gerade rechtwinklig schneiden.

Drei Gerade im Raume sind durch zwölf Zahlen bestimmt. Zwei dieser Geraden seien festgelegt. Soll nun die dritte auf den beiden festen Geraden senkrecht stehen, so müssen zwei Bedingungsgleichungen zwischen den zwölf Constanten stattfinden. Da die zwei festen Geraden acht von den zwölf Zahlen absorbieren und die beiden Bedingungsgleichungen weitere zwei als Funktion der übrigen auszudrücken gestatten, so bleiben noch zwei Zahlen beliebig, und demgemäs gibt es zweifach unendlich viele Geraden, welche mit jeder von zwei festen Geraden einen Winkel von $90^0$ bilden.

Schneiden sich zwei Gerade, so findet zwischen ihren acht Constanten die Bedingungsgleichung (**57.**$_2$) statt. Es bleiben also, wenn man eine von den Geraden als fest annimmt, noch drei Zahlen willkürlich, und demgemäs gibt es dreifach unendlich viele Geraden, welche eine gegebene Gerade schneiden.

Hat man zwei feste und eine bewegliche Gerade, also acht Constante und vier variabele Zahlen, und macht man die Bedingung, dafs die bewegliche Gerade die beiden festen schneide, so sind hierzu zwei Bedingungsgleichungen erforderlich. Es bleiben demgemäs nur noch zwei Zahlen als beliebig wählbar übrig. Die Zahl der Geraden, welche gleichzeitig zwei feste Geraden schneiden, ist also eine zweifach unendlich grofse. Soll nun jede Gerade, welche dieser zweifach unendlichen Schaar von Geraden angehört, die erste feste Gerade unter dem Winkel $v$ und die zweite unter dem Winkel $v_1$ schneiden, so müssen weitere zwei Bedingungsgleichungen bestehen, wodurch die zwei Constanten vollständig bestimmt werden, und zwar erhält man für jede Constante nur einen Wert, da die bezüglichen Gleichungen rücksichtlich derselben linear sind. Es gibt also nur eine Gerade, welche zwei gegebene Gerade unter einer festen Richtung schneidet, und also auch nur eine Gerade, welche zwei andern Geraden schneidet und zugleich senkrecht zu beiden ist.

Die Zahl der Geraden, welche drei feste Geraden schneiden, ist einfach unendlich grofs; denn es existieren in diesem Falle zwischen den vier Constanten der beweglichen Geraden drei Be-

dingungsgleichungen, so dafs also nur noch eine Constante willkürlich bleibt. Es gibt zwei Gerade, welche jede von vier gegebenen Geraden schneidet. Denn durch die vier Bedingungsgleichungen, welche bei Lösung dieses Problems auftreten, sind die vier Constanten der beweglichen Geraden vollständig bestimmt. Da diese Constanten aber in die genannten Gleichungen von der zweiten Dimension eingehen, so führt die Auflösung derselben auf eine quadratische Gleichung.

Es wird nun unsere Aufgabe sein, die Lösung der hier berührten Aufgaben im Einzelnen durchzuführen, und die Ausnahmen festzustellen, welche obige allgemeine Sätze bei speziellen Lagen der Geraden gegeneinander erleiden.

## 60.

**Durchstosspunkte einer Geraden mit den Coordinatenebenen.** Die Punkte, in welchen eine Gerade die Coordinatenebenen durchsetzt, nennt man die Durchstofspunkte der Geraden. Von denselben war bereits in (**52**) und (**58**) die Rede. In dieser Nummer soll nun ausführlicher von denselben gehandelt und auf ihre grofse Wichtigkeit hingewiesen werden.

Die Coordinaten der Durchstofspunkte einer Geraden lassen sich, je nach der Wahl der Bestimmungsstücke der Geraden, in verschiedenen Formen darstellen.

Ist die Gerade durch zwei feste Punkte gegeben, dann berechnen sich die Coordinaten ihrer Durchstofspunkte folgendermafsen. Die Coordinaten eines Punktes der Geraden stellen sich nach (**28**$_3$) dar durch die Formeln:

$$x = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k} \qquad y = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k} \qquad z = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}. \quad (1)$$

Jedem Werte von $k$ entspricht ein Punkt, und umgekehrt entspricht jedem Punkte nur ein einziger Wert von $k$; denn die Werte von $k$, welche aus den drei Formeln erhalten werden, wenn $x, y, z$ Coordinaten eines Punktes einer Geraden sind, sind einander gleich nach (**53**). Um also die Coordinaten der Durchstofspunkte zu berechnen, ist es notwendig, die Werte des Parameters $k$ zu kennen,

die ihnen entsprechen. Zu diesem Zwecke ist aber nach dem Gesagten die Kenntnis von nur einer Coordinate eines jeden Durchstoſspunktes erforderlich. Für die Durchstoſspunkte der $xy$, $xz$ und $yz$ Ebene aber hat man beziehungsweise

$$z = 0 \qquad y = 0 \qquad x = 0$$

Daher bestehen folgende drei Gleichungen:

$$z_1 + k z_2 = 0 \qquad y_1 + k y_2 = 0 \qquad x_1 + k x_2 = 0$$

zur Bestimmung der Werte von $k$ für die drei Durchstoſspunkte. Dieselben sind für den Durchstoſspunkt in der Ebene

| der $xy$: | der $xz$: | der $yz$: |
|---|---|---|
| $k = -\frac{z_1}{z_2}$ | $k = -\frac{y_1}{y_2}$ | $k = -\frac{x_1}{x_2}$ |

Setzt man jeden dieser Werte von $k$ in die drei Formeln (1) nacheinander ein, so ergeben sich

$$\frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1} \text{ und } \frac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{z_2 - z_1} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

als die $x$ und $y$ Coordinaten des Durchstoſspunktes $d_1$ der Geraden in der $xy$ Ebene,

$$\frac{y_2 z_1 - z_2 y_1}{y_2 - y_1} \text{ und } \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

als die $z$ und $x$ Coordinaten des Durchstoſspunktes $d_2$ in der $xz$ Ebene, und

$$\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \text{ und } \frac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{x_2 - x_1} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

als die $y$ und $z$ Coordinaten des Durchstoſspunktes $d_3$ in der $yz$ Ebene.

Ist eine Gerade gegeben durch einen festen Punkt $(a, b, c)$ und ihre Richtung $(\alpha, \beta, \gamma)$, irgend ein Punkt $(x, y, z)$ in ihr also bestimmt durch:

$$\begin{aligned} x &= a + \varrho \cos\alpha \\ y &= b + \varrho \cos\beta \\ z &= c + \varrho \cos\gamma \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

so sind die Entfernungen $\varrho$ der Durchstofspunkte von dem Punkte $(a, b, c)$ bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$a + \varrho \cos\alpha = o \qquad b + \varrho \cos\beta = o \qquad c + \varrho \cos\gamma = o \ . \quad (6)$$

Die erste Gleichung liefert die Entfernung des Durchstofspunktes in der $yz$ Ebene, die zweite die Entfernung des Durchstofspunktes in der $xz$ Ebene, und die dritte endlich die Entfernung des Durchstofspunktes in der $xy$ Ebene vom Punkte $(a, b, c)$.

Setzt man die durch (6) bestimmten Werte von $\varrho$ in die Coordinatenausdrücke (5) ein, so ergeben sich

$$\frac{-a\cos\beta + b\cos\alpha}{\cos\alpha}, \quad \frac{-a\cos\gamma + c\cos\alpha}{\cos\alpha} \ . \ . \quad (7)$$

als Coordinaten des Durchstofspunktes der Geraden mit der $yz$ Ebene,

$$\frac{-b\cos\alpha + a\cos\beta}{\cos\beta}, \quad \frac{c\cos\beta - b\cos\gamma}{\cos\beta} \ . \ . \ . \quad (8)$$

als Coordinaten des Durchstofspunktes der Geraden mit der $xz$ Ebene, und

$$\frac{a\cos\gamma - c\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{b\cos\gamma - c\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad . \ . \ . \quad (9)$$

als die Coordinaten des Durchstofspunktes mit der $xy$ Ebene.

Wenn endlich die Gerade durch ihre projicierenden Ebenen gegeben ist:

$$y = Ax + B \qquad z = A_1 x + B_1 \ . \ . \ . \quad (10)$$

so erhält man als Coordinaten ihrer Durchstofspunkte in der Ebene der

$$\begin{array}{lccc} xy: & -\frac{B_1}{A_1}, & \frac{A_1 B - B_1 A}{A_1}, & o \\ xz: & -\frac{B}{A}, & o, & \frac{A B_1 - B A_1}{A} \\ yz: & o, & B, & B_1 \end{array} \ . \quad (11)$$

Es ergibt sich dies Resultat, wenn man in den Gleichungen (10) nacheinander

$$z = o, \qquad y = o, \qquad x = o$$

setzt, und dann die übrigen Coordinaten aus den dadurch entstehenden drei Paaren von Gleichungen berechnet.

Es ist nun leicht nach (**53.**$_{11}$) die Gleichungen einer Raumgeraden aufzustellen, deren Durchstofspunkte gegeben sind, und zwar bedarf man zu diesem Zwecke nur der Kenntnis zweier Durchstofspunkte. Auch ist es einerlei, welche zwei von den drei Durchstofspunkten $(x, y, o)$; $(x, o, z)$; $(o, y, z)$ man verwendet. Die resultierenden Gleichungen sind in allen drei Fällen dieselben.

Wenn also $(x_1, y_1, o)$ die Coordinaten des Durchstofspunktes einer Geraden mit der $xy$ Ebene sind, $(x_2, o, z_2)$ diejenigen des Durchstofspunktes in der $xz$ Ebene, dann sind die Gleichungen der Geraden:

$$\begin{aligned} x y_1 - y (x_2 - x_1) - x_2 y_1 &= o \\ y z_2 + z y_1 + y_1 z_2 &= o \\ z (x_2 - x_1) - x z_2 - x_1 z_2 &= o \end{aligned} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Benützt man dagegen die Durchstofspunkte in der $xy$ Ebene und in der $yz$ Ebene, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x (y_3 - y_1) + y x_1 + x_1 y_3 &= o \\ y z_3 - z (y_3 - y_1) + y_1 z_3 &= o \\ z x_1 + x z_3 + z_3 x_1 &= o \end{aligned} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

für dieselbe Gerade, wenn $(o, y_3, z_3)$ die Coordinaten des Durchstofspunktes auf der $yz$ Ebene sind. Um nun zu zeigen, dafs diese Gleichungen mit den vorigen übereinstimmen, erinnere man sich, dafs die drei Durchstofspunkte auf einer Geraden liegen. Es lassen sich daher nach (**28.**$_3$) die Coordinaten des Punktes $(o, y_3, z_3)$ durch die Coordinaten der Punkte $(x_1, y_1, o)$, $(x_2, o, z_2)$ wie folgt ausdrücken:

$$o = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y_3 = \frac{y_1}{1 + \lambda} \qquad z_3 = \frac{\lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Bestimmt man den Parameter $\lambda$ aus der ersten Gleichung, und setzt seinen Wert in die zweite und dritte Formel ein, so ergibt sich:

$$y_3 = \frac{y_1 x_2}{x_2 - x_1} \qquad z_3 = \frac{x_1 z_2}{x_1 - x_2}$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichungen (13) gehen letztere aber in die Gleichungen (12) über.

Eine Vergleichung der gewonnenen verschiedenen Formen

für die Coordinaten der Durchschnittspunkte zeigt, dafs folgende Beziehungen obwalten:

$$\begin{aligned} a\cos\gamma - c\cos\alpha &= \varrho'(x_1 z_2 - x_2 z_1) & z_2 - z_1 &= \varrho'\cos\gamma \\ b\cos\alpha - a\cos\beta &= \varrho'(y_1 x_2 - y_2 x_1) & x_2 - x_1 &= \varrho'\cos\alpha \\ c\cos\beta - b\cos\gamma &= \varrho'(z_1 y_2 - z_2 y_1) & y_2 - y_1 &= \varrho'\cos\beta \end{aligned}$$

wenn $\varrho'$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Hieraus folgt die Identität:

$$\begin{aligned} (x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_2 - y_1) + (y_1 x_2 - y_2 x_1)(z_2 - z_1) + \\ + (z_1 y_2 - z_2 y_1)(x_2 - x_1) \equiv o \end{aligned} \quad . \quad (13)$$

Legt man durch den Ursprung und die Gerade die durch sie bestimmte Ebene, und bezeichnet man die Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Coordinatenebenen mit $\lambda$, $\mu$, $\nu$, dann ist nach (**34**):

$$\begin{aligned} y_1 x_2 - x_1 y_2 &= \delta\cos\nu \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 &= \delta\cos\mu \\ z_1 y_2 - z_2 y_1 &= \delta\cos\lambda \end{aligned}$$

und vorstehende Identität geht über in:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = o$$

und sagt also aus, dafs das auf der so eben bestimmten Ebene errichtete Lot, auch mit der Geraden einen rechten Winkel einschliefst, ein bekannter Satz der Stereometrie.

Nach (**26.**$_2$) und (**34**) bedeuten die Proportionalitätsfaktoren $\varrho'$ und $\delta$ die Entfernung der beiden festen Punkte, beziehungsweise den doppelten Inhalt des Dreiecks, das sie zusammen mit dem Coordinatenanfang bilden. Es ist somit $\delta : \varrho'$ die Höhe $h$ dieses Dreiecks. Mit Hilfe der Stellung $(\lambda, \mu, \nu)$ der Ebene des letzteren, der Richtung $(\alpha, \beta, \gamma)$ der Geraden und der Höhe $h$ kann aber die Gerade construiert werden.

## 61.

**Spezielle Lagen einer Raumgeraden.** Die Lage einer Geraden im Raume gegen das Coordinatensystem ist bestimmt durch die Lage der Durchstofspunkte in den Coordinatenebenen. Unter allen speziellen Lagen einer Geraden sind diejenigen ausgezeichnet,

deren Durchstofspunkte entweder alle oder teilweise unendlich fern liegen, oder ganz oder teilweise zusammenfallen. In ersterer Hinsicht betrachten wir folgende Fälle:

*a)* Ein Durchstofspunkt liegt unendlich ferne. Die Gerade ist dann parallel mit der entsprechenden Coordinatenebene. Die auf diese projicierende Ebene der Geraden schneidet daher die beiden anderen Coordinatenebenen in Parallelen zu der Axe, welche letzteren gemeinsam ist. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte dieser Parallelen mit den beiden andern Coordinatenaxen ist die Projection der Raumgeraden auf die erstgenannte Coordinatenebene. Es sind also, wenn die Raumgerade parallel ist mit der $xz$ Ebene, und $a$ und $c$ die Abschnitte sind, welche die zur $y$ Axe parallele projicierende Ebene auf der $x$, beziehungsweise $z$ Axe, macht, die Gleichungen der Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 = o \qquad y - b = o \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn die Gerade den Abstand $b$ von der $xz$ Ebene hat. Die projicierenden Ebenen der Geraden auf die $xy$ und $yz$ Ebene fallen zusammen.

Die rein analytische Lösung der Aufgabe, die Gleichungen einer Geraden aufzustellen, deren einer Durchstofspunkt im Unendlichen liegt, ist ebenso einfach, indem es sich nur darum handelt, die Constanten in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= o \\ Px + Qz + R &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so zu bestimmen, dafs die Coordinaten eines Durchstofspunktes der durch sie dargestellten Geraden unendlich grofs werden. Soll dies eintreten für den Durchstofspunkt in der $xy$ Ebene, so müfsen $x$ und $y$ unendlich grofs werden für $z = o$. Die obigen Gleichungen liefern aber für $z = o$ die Werte:

$$x = -\frac{R}{P} \qquad y = \frac{-CP + AR}{BP}$$

Wie aus den Nennern der Brüche rechts ersichtlich ist, genügt es, zur Erfüllung der gestellten Forderungen $P = o$ zu setzen. Also sind

$$Ax + By + C = o$$
$$Qz + R = o$$

die Gleichungen einer zur $xy$ Ebene parallelen Geraden im Abstande $-R:Q$ von dieser Coordinatenebene. Die Projection der Geraden auf die $xy$ Ebene schneidet, wie die erste Gleichung lehrt, auf den Axen der $x$ und $y$ die Stücke $-C:A$ und $-C:B$ ab.

*b)* Zwei Durchstofspunkte liegen unendlich ferne. In diesem Falle schneidet die Raumgerade zwei Coordinatenebenen nicht, und ist also parallel mit einer jeden von ihnen, und folglich auch parallel mit ihrer gemeinschaftlichen Axe, steht also senkrecht auf der dritten Coordinatenebene. Ihre Projection auf die letztere ist daher ein Punkt, und die zu dieser gehörige projicierende Ebene wird unbestimmt. Die Gleichungen der beiden anderen projicierenden Ebenen sind, wenn $x = a$, $y = b$ die Coordinaten des genannten Projectionspunktes sind

$$x - a = o \qquad y - b = o$$

Dies ergibt sich auch aus den Gleichungen (2), wenn man die Constanten in denselben so bestimmt, dafs die Coordinaten der Durchstofspunkte dieser Geraden mit den Coordinatenebenen der $xz$ und $yz$ unendlich grofs werden. Dies erfordert, dafs man $A = o$ setze und gleichzeitig $Q = o$.

Wenn die Durchstofspunkte einer Geraden zusammenfallen, so sind auch hier zwei Fälle zu unterscheiden:

*a)* Zwei Durchstofspunkte fallen zusammen. Dies ist nur möglich, wenn die Gerade eine der drei Coordinatenaxen schneidet. Dann geht aber eine von ihren projicierenden Ebenen durch diese Axe und steht somit senkrecht auf der Coordinatenebene, zu welcher die Axe senkrecht ist; ihre Gleichung schreibt sich somit nach (**53**) in einer der folgenden Formen:

$$Ax + By = o, \quad A_1 x + C_1 z = o, \quad B_1 y + D_1 z = o$$

und zwar in der ersten, zweiten oder dritten Form, je nachdem die $z$, die $y$, oder die $x$ Axe des Coordinatensystems die von der Geraden geschnittene Axe ist.

Um die Gerade vollständig zu bestimmen, bedarf es der Kenntnis der Coordinaten des dritten Durchstofspunktes. Die-

selben seien in dem Falle, wenn die Gerade die $z$ Axe im Punkte $z = c$ durchsetzt, $x = a$ $y = b$; dann sind

$$a\,y - b\,x = o \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

die Gleichungen der drei Projectionen der Geraden.

*b)* Drei Durchstofspunkte fallen zusammen. Die Raumgerade geht dann notwendig durch den Ursprung des Coordinatensystems. Die Gleichungen ihrer projicierenden Ebenen sind daher von der Form:

$$Ax + By = o \qquad Lx + Mz = o \qquad Py + Qz = o$$

wo nach (**53**) sein mufs:

$$P = LB \qquad Q = -AM$$

## 62.

**Eine Gerade von gegebener Richtung durch einen gegebenen Punkt zu ziehen.** Der Punkt, durch welchen die Gerade gelegt werden soll, sei gegeben durch seine Coordinaten $a$, $b$, $c$, die Richtung der Geraden durch die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, welche sie mit den Axen bildet.

Die Gleichungen der Geraden können nach (**53**.$_{12}$) ohne weiteres hingeschrieben werden. Auf dem in (**59**) aufgeschlossenen Wege der Constantenbestimmung gelangt man folgendermafsen zum Ziele.

Die Gleichungen der gesuchten Geraden müssen nach (**55**.$_3$) jedenfalls die Form haben:

$$\begin{aligned} y &= Ax + B \\ z &= A_1 x + B_1 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

oder doch auf diese Form gebracht werden können.

Damit diese Gerade durch den Punkt $(a, b, c)$ gehe, müssen zwischen den Constanten $A$, $B$, $A_1$, $B_1$ folgende zwei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$b = Aa + B \qquad c = A_1 a + B_1 \quad \ldots \quad (2)$$

und damit die Gerade die Richtung $(\alpha, \beta, \gamma)$ habe, müssen nach (**55**.$_7$) dieselben Constanten den Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}} \quad \ldots\ldots (3)$$
$$\cos\gamma = \frac{A_1}{\sqrt{1 + A^2 + A_1^2}}$$

gemäs gewählt werden. Die eine dieser Gleichungen ist aber nach (**16**) eine Folge der beiden andern. Die Gleichungen (2) und (3) dienen nun dazu die Constanten $A$, $A_1$, $B$ und $B_1$ zu bestimmen. Man findet leicht aus den zuletzt aufgestellten Gleichungen:

$$A = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \qquad A_1 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots (4)$$

Setzt man diese Werte in (2) und löst letztere Gleichungen nach $B$ und $B_1$ auf, so findet man auch noch:

$$B = \frac{b\cos\alpha - a\cos\beta}{\cos\alpha} \qquad B_1 = \frac{c\cos\alpha - a\cos\gamma}{\cos\beta} \quad . \quad (5)$$

Durch Substitution der Werte (4) und (5) in (1) erhält man nachstehende Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$y - b = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - a)$$
$$z - c = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - a) \quad \ldots\ldots (6)$$

Diese Gleichungen sind das Resultat der Elimination von $A$, $B$, $A_1$, $B_1$ aus (1), (2) und (3). Die Elimination läfst sich jedoch rascher auf folgende Weise ausführen. Subtrahiert man nämlich die (2) von den (1), so ergibt sich:

$$y - b = A\,(x - a)$$
$$z - c = A_1\,(x - a) \quad \ldots\ldots (7)$$

und setzt man jetzt die Werte von $A$ und $A_1$ aus (4) hier ein, so ergeben sich ebenfalls die (6). Die Gleichungen (7) sind diejenigen einer Geraden, welche durch den Punkt $(a, b, c)$ geht. Die Richtung derselben hängt ab von den Werten der Constanten $A$ und $A_1$. Indem man die letzteren in den (7) ändert, erhält man nach

und nach die Gleichungen aller Geraden, welche durch den genannten Punkt hindurch gehen. Die Anzahl derselben ist zweifach unendlich grofs. Man erkennt aus der Form der Gleichungen (7), dafs $A$ und $A_1$ die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel sind, welche die Projectionen der Geraden auf die $xy$, beziehungsweise $xz$ Ebene mit der $x$ Axe einschliefsen.

An diese Aufgabe schliefst sich naturgemäs die Aufgabe an, die Gleichungen einer Geraden aufzustellen, welche mit einer durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden parallel ist. Die gesuchten Gleichungen haben wieder die Form (1). Soll aber die Gerade (1) mit der Geraden, deren Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ z &= px + q \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wo also $m$, $n$, $p$, $q$ gegebene Constanten sind, parallel sein, so hat man nach (**56**.$_6$) $A = m$ und $A_1 = p$ zu setzen.

Es sind also

$$\begin{aligned} y &= mx + B \\ z &= nx + B_1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

die Gleichungen der gesuchten Parallelen. Die Anzahl derselben ist eine zweifach unendliche, da $B$ und $B_1$ noch beliebig gewählt werden können. Macht man die Substitutionen $A = m$ und $A_1 = p$ in (7), so ergeben sich:

$$\begin{aligned} y - b &= m\ (x - a) \\ z - c &= p\ (x - a) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

als Gleichungen einer Geraden, welche durch den festen Punkt $(a, b, c)$ geht und mit der Geraden (8) parallel ist.

## 63.

**Gerade durch einen Punkt, senkrecht zu einer andern Geraden.** Nach der vorigen Nummer hat eine durch den festen Punkt $(a, b, c)$ gehende Gerade die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y - b &= A\ (x - a) \\ z - c &= A_1\ (x - a) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo $A$ und $A_1$ beliebige Constanten sind. Soll nun diese Gerade auf der Geraden

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ z &= px + q \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

senkrecht stehen, so mufs nach (**56.**$_4$) zwischen den die Richtungen der beiden Geraden bestimmenden Constanten $A$, $A_1$, $m$, $p$ die Bedingung stattfinden:

$$1 + Am + A_1 p = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

In dieser Gleichung sind $m$ und $n$ gegebene, $A$ und $A_1$ dagegen gesuchte Gröfsen. Es kann nun eine der zwei Constanten $A$ und $A_1$ beliebig gewählt werden, die andere ist dann durch die Gleichung eindeutig bestimmt. Es gibt also einfach unendlich viele Gerade, welche durch einen festen Punkt gehen und auf einer gegebenen Geraden senkrecht stehen. Die Projectionen aller dieser Geraden auf die Horizontaltafel beziehungsweise Vertikaltafel sind dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (y - b) - A\ (x - a) &= o \\ (z - c) - A_1\ (x - a) &= o \end{aligned}$$

wenn $A$ und $A_1$ der Bedingung (3) genügen, oder, wenn man die Vertikaltafel (die $xz$ Ebene) in vorgeschriebener Weise umklappt, so dafs die $+ z$ Axe auf die $- y$ Axe zu liegen kommt, durch

$$\begin{aligned} (y - b) - A\ (x - a) &= o \\ (y + c) + A_1\ (x - a) &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die beiden Geraden (4) schneiden sich in einem Punkte, dessen Coordinaten Funktionen der Parameter $A$ und $A_1$ sind. Mit den Wertänderungen der letzteren ändern sich also auch die Coordinaten des Schnittpunktes von (4) und damit seine Lage. Wenn nun zwischen $A$ und $A_1$ die lineare Gleichung (3) besteht, dann bildet die durch dieses Gesetz vorgeschriebene Aufeinanderfolge der Punkte eine Gerade, deren Gleichung durch Elimination von $A$ und $A_1$ aus (3) und (4) sich ergibt in der Form:

$$x - a + m\,(y - b) - p\,(y + c) = o \quad \ldots \quad (5)$$

Daher der Satz:

Die Horizontal- und Vertikalprojectionen aller Geraden $G$, welche einen rechten Winkel mit einer gegebenen Gerade $g$ bilden und aufserdem durch einen festen Punkt $P$ gehen, schneiden sich auf einer Geraden $\Sigma$.

Zur Construction der Geraden $\Sigma$ bedarf es der Kenntnis der Projectionen zweier Geraden $G$. Dieselben sind leicht zu finden. Denn man erkennt aus (3) ohne Schwierigkeit, dafs

$$A = o \qquad A_1 = -\frac{1}{p}$$

und

$$A_1 = o \qquad A = -\frac{1}{m}$$

zwei Paare einander entsprechende Parameterwerte sind, und dafs also

$$y - b = o \qquad z - c = -\frac{1}{p}(x - a) \quad . \quad . \quad (6)$$

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \qquad z - c = o \quad . \quad . \quad (7)$$

zwei Paare einander entsprechende Geraden sind. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte beider Paare ist die gesuchte Gerade $\Sigma$.

Verzeichnet man also jetzt (Fig. 52) in der $xy$ Ebene und in der umgeklappten $xz$ Ebene die durch die Gleichungen (2) gegebenen Geraden $g'$ und $g''$ und den gegebenen festen Punkt $P$, dann hat man, um die Geraden (6) darzustellen, durch $P'$ eine Parallele $G_1'$ mit der Axe zu ziehen, und durch $P''$ die Senkrechte $G_1''$ zu $g''$. Die Geraden (7) werden dargestellt, indem man eine Parallele $G_2''$ zur Axe durch $P''$ und die Senkrechte $G_2'$ durch $P'$ auf $g'$ fällt. Es schneiden sich dann einerseits $G_1'$ und $G_1''$ in einem Punkte, anderseits $G_2'$ und $G_2''$ in einem Punkte. Die Verbindungslinie beider Punkte ist die Gerade $\Sigma$.

## 64.

**Gleichung einer Geraden, welche eine feste Gerade schneidet.**

Die Anzahl der Geraden, welche eine feste Gerade schneiden, ist dreifach unendlich nach (**59**). Um den strengen Beweis hier-

über zu führen, ist es notwendig, die Gleichungen einer Geraden, welche der dreifach unendlichen Schaar angehört, aufzustellen. Dieselben müssen dann drei willkürliche Constante enthalten. Zu diesem Zwecke seien:

$$\begin{aligned} y - Ax - B &= o \\ z - A_1 x - B_1 &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichungen der festen Geraden. Auf derselben fixieren wir irgend einen Punkt, dessen Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ seien. Es bestehen dann die Relationen:

$$\begin{aligned} y_1 &= A x_1 + B \\ z_1 &= A_1 x_1 + B_1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ein beweglicher Punkt einer beliebigen durch $(x_1, y_1, z_1)$ gehenden Geraden, welche mit den Axen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ bilden möge, hat die Coordinaten:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \varrho \cos\alpha \\ y &= y_1 + \varrho \cos\beta \\ z &= z_1 + \varrho \cos\gamma \end{aligned}$$

und es sind also

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \quad \ldots \quad (3)$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden, vorausgesetzt, dafs die in diesen Gleichungen neben $x_1$ auftretenden Coordinaten $y_1$, $z_1$ in Funktion von $x_1$ aus den (2) berechnet und in dieselbe eingesetzt werden. Thut man dies, so finden sich folgende Gleichungen der Geraden:

$$\begin{aligned} \frac{z - A_1 x_1 - B_1}{\cos\gamma} &= \frac{x - x_1}{\cos\alpha} \\ \frac{y - A x_1 - B}{\cos\beta} &= \frac{x - x_1}{\cos\alpha} \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Durch Änderung von $x_1$ erhält man alle Geraden von constanter Richtung $\alpha, \beta, \gamma$, welche die gegebene Gerade schneiden. Ändert man auch noch $\alpha, \beta, \gamma$, so erhält man die Gesamtheit aller Geraden, welche überhaupt durch die Gerade hindurchgelegt werden können. Bringt man die (4) auf die Form:

$$(z - B_1)\ \cos\alpha - x\cos\gamma = x_1\ (A_1\cos\alpha - \cos\gamma)$$
$$(x - B)\ \cos\alpha - x\cos\beta = x_1\ (A\ \cos\alpha - \cos\beta)$$

und eliminiert hieraus $x_1$, so ergibt sich als Eliminationsresultat:

$$\mu\ (y - Ax - B) - \lambda\ (z - A_1 x - B_1) -$$
$$- (A_1 y - Az - A_1 B + AB_1) = o$$

wenn man

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \lambda \qquad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \mu$$

setzt. Die vorstehende Gleichung mit den variabeln Coordinaten $x_1$, $y$ und den Parametern $\lambda$, $\mu$ stellt somit den Inbegriff aller Geraden dar, welche die feste Gerade (1) schneiden. Die Gleichung reduciert sich auf die folgende:

$$(\mu - A_1)\ (y - Ax - B) - (\lambda - A)\ (z - A_1 x - B_1) = o \quad . \quad (5)$$

wenn man bedenkt, dafs

$$A_1\ (y - Ax - B) - A\ (z - A_1 x - B_1) \equiv$$
$$\equiv (A_1 y - Az - A_1 B + BA_1)$$

ist. Setzt man noch:

$$\frac{\lambda - A}{\mu - A_1} = l$$

wo $l$ also einen Parameter bedeutet, so geht die (5) über in:

$$(y - Ax - B) - l\ (z - A_1 x - B_1) = o$$

Nach dem in (**54**) bewiesenen Satze ist dies aber die Gleichung einer Ebene, welche durch die Gerade (1) geht, wenn wir, dem spätern Nachweise vorgreifend, jenem Satze eine allgemeinere Bedeutung beilegen. Durch Änderung des Parameters $l$ erhält man alle Ebenen, welche durch die Gerade (1) gehen. Dafs in diesen Ebenen, sämtliche die leszteren schneidende Geraden enthalten sind, ist aber klar.

## 65.

**Entfernung eines Punktes von einer Geraden.** Die Gerade sei gegeben durch

$$x = a + \varrho \cos\alpha$$
$$y = b + \varrho \cos\beta$$
$$z = c + \varrho \cos\gamma$$

und die Coordinaten des gegebenen Punktes seien $a_1$, $b_1$, $c_1$.

Es ist dann

$$E = d \sin v$$

wenn man die Winkel, den die Verbindungsgerade der Punkte $(a, b, c)$ und $(a_1, b_1, c_1)$ mit der gegebenen Geraden bildet, mit $v$, mit $d$ die Entfernung dieser Punkte, und mit $E$ die gesuchte Entfernung bezeichnet.

Nach (**26.**$_5$) aber ist:

$$\sin^2 v = \left(\frac{a_1 - a}{d} \cos\gamma - \frac{c_1 - c}{d} \cos\alpha\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{b_1 - b}{d} \cos\alpha - \frac{a_1 - a}{d} \cos\beta\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{c_1 - c}{d} \cos\beta - \frac{b_1 - b}{d} \cos\gamma\right)^2$$

folglich hat man

$$E^2 = [(a_1 - a)\cos\gamma - (c_1 - c)\cos\alpha]^2 +$$
$$+ [(b_1 - b)\cos\alpha - (a_1 - a)\cos\beta]^2 +$$
$$+ [(c_1 - c)\cos\beta - (b_1 - b)\cos\gamma]^2$$

woraus durch Ausziehen der Quadratwurzel die Entfernung $E$ gefunden wird.

Ist die Gerade durch zwei ihrer projicierenden Ebenen

$$y = Ax + B$$
$$z = A_1 x + B_1$$

gegeben, dann läfst sich diese Aufgabe auf die vorige zurückführen, indem man als den Punkt $(a, b, c)$ einen ihrer Durchstofs-punkte wählt. Von denselben eignet sich am bequemsten der Durchstofspunkt mit der $yz$ Ebene. Seine Coordinaten sind

$$a = o \qquad b = B \qquad c = B_1$$

Berechnet man ferner $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nach (**55.**$_7$) und setzt die Werte in (1) ein, so findet sich nach leichter Reduction:

$$E = \sqrt{\frac{(a_1 A_1 - (c_1 - B_1))^2 + ((b_1 - B) - a_1 A)^2 +}{1 + A^2 + A_1^2} + \frac{((c_1 - B_1)\ A - (b_1 - B)\ A_1)^2}{1 + A^2 + A_1^2}} \quad . \quad (2)$$

Die gerade Linie, in welcher die kürzeste Entfernung des Punktes $P$ von einer gegebenen Geraden $g$ liegt, gehört 1) dem System von Geraden an, welche durch $P$ an $g$ gelegt werden können, 2) dem System von Geraden, welche durch $P$ gehen und einen rechten Winkel mit $g$ bilden. Bezeichnet nun $\Sigma$ die Affinitätsaxe der Horizontal- und Vertikalprojection des ersten Systems, $\Sigma$ die Affinitätsaxe derselben Projectionen des zweiten Systems und $\pi$ den Schnittpunkt von $\Sigma$ und $\Sigma'$, dann gehört die Gerade, deren Projectionen durch $\pi$ und $P'$ und durch $\pi$ und $P''$ bestimmt sind, offenbar den beiden obengenannten Systemen an, und zwar ist es die einzige Gerade dieser Art, weil $\Sigma$ und $\Sigma'$ sich nur in einem Punkte schneiden. (Fig. 53).

Um endlich die Länge der Senkrechten $\Sigma$ zu finden, mufs man nach (**26**) die wahre Gröfse der Strecke $PM$ bestimmen.

## 66.

**Gerade, welche zwei gegebene Gerade schneidet.** Es seien

$$\begin{aligned} y &= A\,x + B & \qquad y &= a\,x + b \\ z &= A_1 x + B_1 & \qquad z &= a_1 x + b_1 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichungen der beiden festen Geraden. Auf Grund von (**57.**$_2$) lassen sich die Bedingungen dafür, dafs die bewegliche Gerade

$$\begin{aligned} y &= \lambda x + m \\ z &= \mu x + n \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die beiden festen Geraden schneide, nach leichter Umformung, darstellen wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda\,(n - B_1) - \mu\,(m - B) + P &= o \\ \lambda\,(n - b_1) - \mu\,(m - b) + p &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo ist

$$\begin{aligned} P &= A_1\,(m - B) - A\,(n - B_1) \\ p &= a_1\,(m - b) - a\,(n - b_1) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch Auflösung der Gleichungen (3) nach $\lambda$ und $\mu$ ergibt sich:

$$\lambda = \frac{P(b - m) - p(B - m)}{n(B - b) + m(B_1 - b_1)}$$
$$\mu = \frac{P(b_1 - n) - p(B_1 - n)}{n(B - b) + m(B_1 - b_1)} \quad \ldots \quad (5)$$

Setzt man diese Werte in (2), so erhält man die Gleichungen einer Geraden, welche die festen Geraden (1) schneidet, in folgender Gestalt:

$$y = \frac{(b - m)P - (B - m)p}{(B - b)n + (B_1 - b_1)m} x + m$$
$$z = \frac{(b_1 - n)P - (B_1 - n)p}{(B - b)n + (B_1 - b_1)m} x + n \quad \ldots \quad (6)$$

Da zufolge (4) die in diesen Gleichungen auftretenden Constanten $P$ und $p$ lineare Funktionen von $m$ und $n$ sind, so sind die Coëfficienten von $x$ quadratische Funktionen von $m$ und $n$, und da letztere Constanten willkürlich sind, so gibt es zweifach unendlich viele Geraden, welche zwei feste Gerade schneiden.

Fragt man nach der Anzahl der Geraden, welche von einem festen Punkte des Raumes aus an zwei feste sich kreuzende Gerade gelegt werden können, so wird diese Frage durch die (6), wenn man die Coordinaten des festen Raumpunktes $(x, y, z)$ als bekannte Constante, $m$ und $n$ dagegen als Unbekannte betrachtet, dahin beantwortet, dafs diese Anzahl gleich vier ist. Denn die Gleichungen (6) sind in Bezug auf $m$ und $n$ vom zweiten Grade.

Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt jedoch, dafs diese aus den Gleichungen (6) gezogene Schlufsfolgerung falsch ist.

Nach der vorigen Nummer ist nämlich der geometrische Ort aller Geraden, die von dem festen Punkte $(x, y, z)$ an eine der festen Geraden (1) gezogen werden können, die Ebene, welche durch die Gerade und den festen Punkt bestimmt ist. Construiert man die Ebene für beide Geraden, so erhält man in der Schnittlinie beider Ebenen offenbar eine Gerade, welche durch den festen Punkt $(x, y, z)$ geht und die beiden festen Geraden (1) schneidet. Dafs eine zweite Gerade dieser Art nicht existiert, ergibt sich aber hieraus zur Evidenz.

Der Widerspruch, welcher zwischen diesem Resultat und dem aus den Formeln (6) gezogenen besteht, kann nur davon herrühren, dafs durch die Art und Weise der vollzogenen Elimination von $\lambda$ und $\mu$ aus (2) und (3) die Zähler der Coëfficienten von $x$ in (6) quadratische Funktionen geworden sind. Um dies zu vermeiden, ist es notwendig, die Elimination auf eine andere Art durchzuführen. Statt nämlich $\lambda$ und $\mu$ aus (3) zu berechnen und in (2) zu substituieren, wie geschehen, kann man auch umgekehrt $\lambda$ und $\mu$ aus (2) nehmen und in (3) einsetzen. Auf diese Weise ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{y - Ax - m}{z - A_1 x - n} = \frac{m - B}{n - B_1} \qquad \frac{y - ax - m}{z - a_1 x - n} = \frac{m - b}{n - b_1}$$

oder nach $m$ und $n$ geordnet:

$$\begin{aligned} n(y - Ax - B) - m(z - A_1 x - B_1) - B_1 y + Bz - \\ - (A_1 B - A B_1) x = o \\ n(y - ax - b) - m(z - a_1 x - b_1) - b_1 y + bz - \\ - (a_1 b - a b_1) x = o \end{aligned} \quad . \quad (7)$$

Setzt man in die erste von diesen Gleichungen die Werte für $y$ und $z$ aus den Gleichungen der ersten Geraden (1), und in die zweite die Werte von $y$ und $z$ aus den Gleichungen der zweiten Geraden (1), so verschwinden die linken Seiten identisch für jeden Wert von $x$. Wir werden im nächsten Kapitel beweisen, dafs diese beiden Gleichungen Ebenen vorstellen. Das so eben angedeutete Resultat zeigt also an, dafs sämtliche Punkte einer Geraden (1) auf einer der Ebenen (7) liegen, kurz, dafs jede Gerade (1) ganz in einer dieser Ebenen enthalten ist.

In den Gleichungen (7) treten nun die Constanten $m$ und $n$ der beweglichen Geraden (2) in linearer Weise auf. Fixiert man also jetzt einen beliebigen Raumpunkt $(x_1, y_1, z_1)$, und setzt seine Coordinaten in die (7), so ergeben sich zur Bestimmung von $m$ und $n$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} n(y_1 - Ax_1 - B) - m(z_1 - A_1 x_1 - B_1) - B_1 y_1 + Bz_1 - \\ - (A_1 B - A B_1) x_1 = o \\ n(y_1 - ax_1 - b) - m(z_1 - a_1 x_1 - b_1) - b_1 y_1 + bz_1 - \\ - (a_1 b - a b_1) x_1 = o \end{aligned}$$

Durch Auflösung derselben nach $m$ und $n$ und Substitution der erhaltenen Werte in (7) ergeben sich dann die Gleichungen der Geraden, welche durch den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ geht und die festen Geraden (1) schneidet. Die Gleichungen (7) bestätigen also das Resultat, dafs durch jeden Punkt $(x, y, z)$ nur eine einzige Gerade geht, welche die beiden festen Geraden schneidet.

Die Zeichnung der Geraden $G$, welche zwei feste Gerade $G_1$ und $G_2$ schneidet, und zugleich durch einen festen Punkt $P$ geht, geschieht gemäs der oben angestellten Überlegung dadurch, dafs man nach (**58**) die beiden Geraden $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ zeichnet, und ihren Schnittpunkt mit $P'$, beziehungsweise $P''$ verbindet. Fig. 54.

## 67.

**Gerade, welche zwei gegebene Gerade unter rechten Winkeln schneidet.** Die gegebenen Geraden seien $G_1$ und $G_2$. Die Coordinaten eines beweglichen Punktes auf der ersteren mögen mit $x'$, $y'$, $z'$, und die Coordinaten eines beweglichen Punktes auf der letzteren mit $x''$, $y''$, $z''$ bezeichnet werden. Die Gleichungen der gegebenen Geraden haben dann die Form:

$$\begin{aligned} y' &= A_1 x' + B_1 & \qquad y'' &= A_2 x'' + B_2 \\ z' &= a_1 x' + b_1 & \qquad z'' &= a_2 x'' + b_2 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Eine bewegliche Gerade $L_1$, welche die feste Gerade $G_1$ im Punkte $(x', y', z')$ schneidet, hat die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y - A_1 x' - B_1 &= \lambda' (x - x') \\ z - a_1 x' - b_1 &= \mu' (x - x') \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Denn wegen des ersten der Gleichungssysteme (1) wird den (2) genügt, wenn man $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzt. Die Gerade (2) steht aufserdem senkrecht auf $G_1$, wenn die Constanten $\lambda'$ und $\mu'$ in diesen Gleichungen der Bedingung

$$1 + \lambda' A_1 + \mu' a_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gemäs gewählt werden.

Eine bewegliche Gerade $L_2$, welche die feste Gerade $G_2$ im Punkte $(x'', y'', z'')$ schneidet und senkrecht zu derselben ist, hat die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y - A_2 x'' - B_2 &= \lambda'' (x - x'') \\ z - a_2 x'' - b_2 &= \mu'' (x - x'') \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn $\lambda''$ und $\mu''$ der Bedingung genügen:

$$1 + \lambda'' A_2 + \mu'' a_2 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Gleichungen (2) und (4) stellen also unter den Bedingungen (3) und (5) zwei Systeme gerader Linien dar, von solcher Art, dafs die Geraden $L_1$ des einen Systems die feste Gerade $G_1$, und die Geraden $L_2$ des andern Systems die feste Gerade $G_2$ unter rechten Winkeln schneiden.

Eine Gerade, welche auf $G_1$ und $G_2$ zugleich senkrecht steht, gehört offenbar sowohl dem System der Geraden (2), als auch dem System der Geraden (4) an. Es wird sich also jetzt darum handeln, die Relationen festzustellen, welche neben (3) und (5) zwischen $\lambda'$, $\mu'$, $\lambda''$ und $\mu''$ noch bestehen müssen, und welche Lage die Punkte $(x', y', z')$ und $(x'', y'', z'')$ auf $G_1$, beziehungsweise $G_2$, haben müssen, damit die Gleichungen (2) mit den Gleichungen (4) identisch werden. Denn die Projectionen einer Geraden, welche gleichzeitig den Systemen $L_1$ und $L_2$ angehört, fallen notwendig zusammen. Es dürfen sich also die Gleichungen der Projectionen nur durch constante Faktoren von einander unterscheiden. Bezeichnet man letztere mit $\varrho$ und $\varrho'$, so müssen also die Identitäten:

$$\begin{aligned} y - A_1 x' - B_1 - \lambda' (x - x') &\equiv \varrho \left(y - A_2 x'' - B_2 - \lambda'' (x - x'')\right) \\ z - a_1 x' - b_1 - \mu' (x - x') &\equiv \varrho \left(z - a_2 x'' - b_2 - \mu'' (x - x'')\right) \end{aligned}$$

unabhängig von den Werten der Variabeln $x, y, z$ bestehen, wozu die Erfüllung der Bedingungen

$$\begin{aligned} \varrho &= 1 \quad \lambda' = \lambda'' \quad A_1 x' + B_1 - \lambda' x' = A_2 x'' + B_2 - \lambda'' x'' \\ \varrho' &= 1 \quad \mu' = \mu'' \quad a_1 x' + b_1 - \mu' x' = a_2 x'' + b_2 - \mu'' x'' \end{aligned} \quad (6^a)$$

erforderlich ist.

Die Bedingungen $\lambda' = \lambda''$, $\mu' = \mu''$ sagen aus, dafs die Gerade (2) mit der Geraden (4) parallel ist. Berücksichtigt man ihre Existenz, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen (6ª) in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} x' (A_1 - \lambda') - x'' (A_2 - \lambda') &= B_2 - B_1 \\ x' (a_1 - \mu') - x'' (a_2 - \mu') &= b_2 - b_1 \end{aligned} \quad . \quad . \quad (6)$$

Nimmt man zur Probe hieraus $\lambda'$ und $\mu'$, und setzt die erhaltenen Werte in (2) und (4), so werden in der That diese Gleichungen identisch. Sie stellen die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte der Geraden (1) dar. Mann kann aber auch in den (4) $\lambda'' = \lambda'$ und $\mu'' = \mu'$ setzen, hierauf die Werte von $x'$ und $x''$ aus (6) berechnen, und diese in die (2) und (4) substituieren, um sich von der Richtigkeit des eingeschlagenen Weges zu überzeugen. Die durch diese zweite Probe sich ergebenden Gleichungen stellen dann eine Gerade dar, welche die Geraden (1) schneidet in der Richtung $(\lambda, \mu)$.

Dabei findet sich, daſs die Richtung der Geraden, welche die unendlich fernen Punkte von $G_1$ und $G_2$ verbindet, gegeben ist durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1, & \lambda', & \mu' \\ 1, & A_1, & A_2 \\ 1, & a_1, & a_2 \end{vmatrix} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

denn die Determinante auf der linken Seite ist der gemeinsame Nenner der Auflösungen von (6) nach $x'$ und $x''$.

Setzt man also jetzt in (5) $\lambda'' = \lambda'$ und $\mu'' = \mu'$, und berechnet aus

$$\begin{aligned} 1 + \lambda' A_1 + \mu' a_1 &= o \\ 1 + \lambda' A_2 + \mu' a_2 &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$\lambda'$ und $\mu'$, so geben die (6), wenn man in ihnen die so eben gefundenen Werte von $\lambda'$ und $\mu'$ substituiert, die $x$ Coordinaten der Schnittpunkte jener Geraden $L_0$, welche zugleich senkrecht auf $G_1$ und $G_2$ ist. Als Resultat der erwähnten Substitutionen werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} t\,x'' - r\,x' + p &= o \\ s\,x'' - t\,x' + q &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

erhalten, wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$\begin{aligned} A_1 (B_2 - B_1) + a_1 (b_2 - b_1) &= p \\ A_2 (B_2 - B_1) + a_2 (b_2 - b_1) &= q \\ A_1 A_2 + a_1 a_2 + 1 &= t \quad . \quad . \quad . \quad (10) \\ A_1^2 + a_1^2 + 1 &= r \\ A_2^2 + a_2^2 + 1 &= s \end{aligned}$$

Setzt man die aus den (9) berechneten Werte von $x'$ und $x''$ in die (1) ein, so sind damit auch die $y$ und $z$ Coordinaten der Schnittpunkte der Geraden $L_0$ mit $G_1$ und $G_2$ gefunden.

Mit Benützung der Abkürzungen (10) ergeben sich folgende Ausdrücke für die Coordinaten der Schnittpunkte:

$$x' = \frac{t\,q - s\,p}{t^2 - r\,s}$$

$$y' = \frac{t\,q - s\,p}{t^2 - r\,s}\,A_1 + B_1 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$z' = \frac{t\,q - s\,p}{t^2 - r\,s}\,a_1 + b_1$$

und

$$x'' = \frac{r\,q - t\,p}{t^2 - r\,s}$$

$$y'' = \frac{r\,q - t\,p}{t^2 - r\,s}\,A_2 + B_2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$z'' = \frac{r\,q - t\,p}{t^2 - r\,s}\,a_2 + b_2$$

Damit ist unser Problem vollständig gelöst.

Weil zufolge der linearen Beschaffenheit der Gleichungen (9) nur eine einzige Gerade $L_0$ existiert, welche zugleich senkrecht auf $G_1$ und $G_2$ ist, so können wir das Stück dieser Geraden, welches zwischen $G_1$ und $G_2$ liegt, das gemeinsame Lot der zwei Geraden nennen. Die (11) und (12) sind dann die Coordinaten der Fufspunkte des gemeinsamen Lotes.

Wir hätten die Gleichungen (9), welche unser Problem lösen, auch auf folgendem, viel einfacheren Wege herleiten können. Nach (**53.**$_{11}$) ist nämlich die Richtung einer Geraden, welche durch die zwei Punkte $(x', y', z')$ und $(x'', y'', z'')$ bestimmt ist, gegeben durch die Quotienten:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \lambda' \qquad \frac{z'' - z'}{x'' - x'} = \mu' \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun sollen aber die genannten Punkte auf den festen Geraden (1) liegen; also mufs sein:

$$\begin{aligned} y'' - y' &= A_2\,x'' - A_1\,x' + B_2 - B_1 \\ z'' - z' &= a_2\,x'' - a_1\,x' + b_2 - b_1 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Durch Substitution dieser Werte von $y'' - y'$ und $z'' - z'$ in die Ausdrücke (13) für $\lambda'$ und $\mu'$ ergeben sich aber die Gleichungen (6), und aus diesen, wie gezeigt, die Gleichungen (9).

Die Entfernung $D$ irgend zweier Punkte der Geraden $G_1$ und $G_2$ wird erhalten, wenn man die (13) quadriert und addiert und auf beiden Seiten der entstehenden Gleichung die Einheit zufügt, in folgender Form:

$$D^2 = (x'' - x')^2 \, (\lambda'^2 + \mu'^2 + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Sind aber $(x', y', z')$ und $(x'', y'', z'')$ die Fufspunkte des gemeinschaftlichen Lotes der beiden festen Geraden $G_1$ und $G_2$, so haben $\lambda'$ und $\mu'$ in (15) die Werte, welche sich aus (8) ergeben, nämlich:

$$\lambda' = \frac{a_1 - a_2}{a_2 A_1 - a_1 A_2} \qquad \mu' = \frac{A_1 - A_2}{a_1 A_2 - a_2 A_1} \; . \quad (16a)$$

Bezeichnet man also die Entfernung der Fufspunkte mit $d$, so ist

$$d^2 = (x'' - x')^2 \, \frac{t^2 - r s}{(a_1 A_2 - a_2 A_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Denn es ist nach einem bereits in (**53**) angewandten Satze:

$$t^2 - r s = (a_1 - a_2)^2 + (A_1 - A_2)^2 + (a_1 A_2 - a_2 A_1)^2$$

Zufolge (11) und (12) aber hat man:

$$x'' - x' = \frac{(r - t) q - (t - s) p}{t^2 - r s} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und somit wird

$$d = \frac{(r - t) q - (t - s) p}{(a_1 A_2 - a_2 A_1) \sqrt{t^2 - r s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Nun ist aber der Zähler gleich der Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_1 (A_1 - A_2) + a_1 (a_1 - a_2), & A_1 (B_1 - B_2) + a_1 (b_1 - b_2) \\ A_2 (A_1 - A_2) + a_2 (a_1 - a_2), & A_2 (B_1 - B_2) + a_2 (b_1 - b_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[ (A_1 - A_2) (b_1 - b_2) - (B_1 - B_2) (a_1 - a_2) \right] (a_1 A_2 - a_2 A_1)$$

so dafs endlich der Ausdruck für die Länge des gemeinsamen Lotes der Geraden (1) wird:

$$d = \frac{(A_1 - A_2) (b_1 - b_2) - (B_1 - B_2) (a_1 - a_2)}{\sqrt{(A_1 - A_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 A_2 - a_2 A_1)^2}} \; . \quad (19)$$

Um endlich noch die Ausdrücke zu gewinnen für die Winkel,

welche das gemeinsame Lot mit den Axen bildet, seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Neigungswinkel der Geraden $G_1$ und $G_2$ gegen die Axen, und $v$ der Winkel, welchen sie einschliefsen, dann ist nach (**55**) und (**33**$_5$):

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \cos\beta_1 = \frac{A_1}{\sqrt{r}} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{a_1}{\sqrt{r}}$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{s}} \qquad \cos\beta_2 = \frac{A_2}{\sqrt{s}} \qquad \cos\gamma_2 = \frac{a_2}{\sqrt{s}} \quad . \quad (20)$$

$$\sin v = \sqrt{\frac{t^2 - r\,s}{r\,s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Sind also jetzt $\alpha, \beta, \gamma$ die Neigungswinkel des gemeinsamen Lotes gegen die Axen, so hat man unter Beachtung der (17) und (18) und von

$$y'' - y' = \lambda' (x'' - x') \qquad z'' - z' = \mu' (x'' - x')$$

in welch letzteren Formeln $\lambda'$ und $\mu'$ die Werte (16$^a$) haben nach (**26**$_1$):

$$\cos\alpha = \frac{\cos\gamma_1 \cos\beta_2 - \cos\gamma_2 \cos\beta_1}{\sin v}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1}{\sin v} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta_1 \cos\alpha_2 - \cos\beta_2 \cos\alpha_1}{\sin v}$$

Mit Hilfe dieser und der Formeln (20) und (21) kann man dem Ausdruck (19) für die Länge des gemeinsamen Lotes noch folgende einfache Gestalt geben:

$$d = (b_1 - b_2) \cos\beta - (B_1 - B_2) \cos\gamma \quad . \quad . \quad (23)$$

oder

$$d = \frac{1}{\sin v} \begin{vmatrix} o, & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2 \\ b_2 - b_1, & \cos\beta_1, & \cos\beta_2 \\ B_2 - B_1, & \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Um das gemeinsame Lot zweier Geraden construieren zu können, ohne vorher alle diese Rechnungen ausgeführt zu haben, ist es notwendig auf ein tieferes Studium der Formeln (9), welche das Problem lösen, einzugehen, und ihnen neue, rein geometrische Seiten abzugewinnen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die erste dieser Gleichungen:

$$t x'' - r x' + p = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Aus der Art ihrer Ableitung schon geht hervor, dafs sie die Bedingung dafür ist, dafs die Gerade $L_1$, welche die zwei Punkte $(x', y', z')$ und $(x'', y'', z'')$ verbindet, und deren Richtung daher bestimmt wird durch:

$$\lambda = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \qquad \mu = \frac{z'' - z'}{x'' - x'}$$

auf der festen Geraden $G_1$ senkrecht steht. Um den genauen Nachweis zu führen, mufs gezeigt werden, dafs die linke Seite von (25) identisch ist mit

$$1 + \frac{y'' - y'}{x'' - x'} A_1 + \frac{z'' - z'}{x'' - x'} a_1$$

bis auf einen Faktor. Dies ist aber in der That der Fall; denn setzt man in vorstehenden Ausdruck die Werte (14) für die Differenzen $y'' - y'$ und $z'' - z'$, so geht derselbe über in

$$\frac{t x'' - r x' + p}{x'' - x'}$$

Dieser Ausdruck, gleich Null gesetzt, zeigt also an, dafs $L_1$ auf $G_1$ senkrecht steht im Punkte $(x', y', z')$. Da aber $G_1$ und $G_2$ sich nicht schneiden, so hat $x'' - x'$ immer einen endlichen Wert für endliche Werte von $x'$ und $x''$, und folglich genügt es den Zähler gleich Null zu setzen, um die senkrechte Lage der Geraden $L_1$ und $G_1$ gegeneinander analytisch zum Ausdruck zu bringen.

Durch ganz dieselbe Schlufsfolgerung zeigt man, dafs die zweite der Gleichungen (9) die Bedingung dafür ist, dafs die Gerade $L_2$ auf $G_2$ senkrecht steht im Punkte $(x'', y'', z'')$.

Fixieren wir also jetzt auf der Geraden $G_1$ einen Punkt $(x', y', z')$, und legen durch ihn eine Gerade $L_1$ senkrecht zu $G_1$, so dafs sie $G_2$ im Punkte $(x'', y'', z'')$ schneidet, legen ferner durch ihn eine Gerade $L_2$ senkrecht zu $G_2$ im Punkte $(\xi'', \eta'', \zeta'')$, so hat man folgende Gleichungen zur Bestimmung von $x''$, $\xi''$ als Funktion von $x'$:

$$\begin{aligned} t x'' - r x' + p &= o \\ s \xi'' - t x' + q &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Läfst man nun den Punkt $(x', y', z')$ auf der Geraden $G_1$ sich fortbewegen, so beschreiben die Punkte $(x'', y'', z'')$ und $(\xi'', \eta'', \zeta'')$ zwei Punktreihen auf $G_2$, welche zu einander affin sind. Denn eliminiert man aus den (**26**) $x'$, so ergibt sich:

$$t^2 x'' - r s \xi'' + t p - r q = o \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Nach (**50**) bestimmt aber diese Gleichung eine Affinität auf der Geraden $G_2$ mit dem Affinitätspunkte:

$$x'' = \xi'' = \frac{r q - t p}{t^2 - r s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28^a)$$

Fixieren wir ferner auf der Geraden $G_2$ einen Punkt $(x'', y'', z'')$ und legen durch ihn eine Gerade $L_2$ senkrecht zu $G_2$, so dafs sie $G_1$ im Punkte $(x', y', z')$ schneidet, legen weiter durch ihn eine Gerade $L_1$ senkrecht zu $G_1$, und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit der letzteren Geraden durch $(\xi', \eta', \zeta')$, dann hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} s x'' - t x' + q &= o \\ t x'' - r \xi' + p &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Durchläuft jetzt der Punkt $(x'', y'', z'')$ die Gerade $G_2$, so beschreiben die Punkte $(x', y', z')$ und $(\xi', \eta', \zeta')$ auf $G_1$ zwei affine Punktreihen, deren Gleichung durch Elimination von $x''$ aus den (28) erhalten wird. Sie ist daher:

$$r s \xi' - t^2 x' + t q - s p = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und somit hat der Affinitätspunkt die $x$ Coordinate:

$$\xi' = x' = \frac{t q - s p}{t^2 - r s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Eine Vergleichung der Ausdrücke auf den rechten Seiten von $(28^a)$ und (30) mit den $x$ Coordinaten (11) und (12) der Fufspunkte des gemeinsamen Lotes der Geraden $G_1$ und $G_2$ zeigt, dafs die Affinitätspunkte der Affinitäten (27) und (29) identisch sind mit diesen Fufspunkten.

Wir haben daher den schönen Satz:

Wenn zwei Gerade $L_1$ und $L_2$ an zwei festen Geraden $G_1$ und $G_2$ so hingleiten, dafs $L_1$ stets mit $G_1$ und $L_2$ stets mit $G_2$ einen rechten Winkel

bildet, und man ordnet immer zwei solche Gerade $L_1$ und $L_2$ einander zu, welche sich schneiden, so schneiden die zugeordneten Geraden der Systeme $L_1$ und $L_2$ auf $G_1$ und $G_2$ affine Punktreihen aus, deren Affinitätspunkte die Fufspunkte des gemeinsamen Lotes von $G_1$ und $G_2$ sind.

Es ist nämlich klar, dafs sich zwei Gerade $L_1$ und $L_2$ nur auf $G_1$ und $G_2$ schneiden können. Denn träfen sie sich aufserhalb, so bildeten sie mit $G_1$ und $G_2$ ein ebenes Viereck, was gegen die Voraussetzung ist, dafs $G_1$ und $G_2$ sich kreuzen.

Wie nach dem angeführten Satze die Construktion des gemeinsamen Lotes durchzuführen ist, läfst sich leicht erraten. Die Anleitung wird in (**69**) gegeben werden.

## 68.

**Gerade an drei und vier feste Gerade.** Wenn die Gleichungen von drei festen Geraden vorliegen:

$$\begin{array}{lll} y = Ax + B & y = A_1 x + B_1 & y = A_2 x + B_2 \\ z = ax + b & z = a_1 x + b_1 & z = a_2 x + b_2 \end{array} \quad . \quad (1)$$

von welchen im Allgemeinen keine zwei in einer Ebene liegen, so gibt es einfach unendlich viele Gerade, welche diese drei festen Geraden gleichzeitig schneiden.

Sind nämlich

$$\begin{array}{l} y = \lambda x + m \\ z = \mu x + n \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichungen der beweglichen Geraden, so hat man behufs Erfüllung der Forderung, dafs diese die festen Geraden schneide, drei der Constanten $\lambda$, $\mu$, $m$, $n$ aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} (m - B)\,(a - \mu) - (n - b)\,(A - \lambda) = o \\ (m - B_1)\,(a_1 - \mu) - (n - b_1)\,(A_1 - \lambda) = o \\ (m - B_2)\,(a_2 - \mu) - (n - b_2)\,(A_2 - \lambda) = o \end{array} \quad . \quad (3)$$

zu bestimmen und in die (2) einzusetzen. In diesen Gleichungen erscheint dann nur noch eine der vier Constanten willkürlich, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Eliminiert man aus den (2)

hierauf diese willkürliche Constante, so stellt die durch das Eliminationsresultat gegebene Gleichung den geometrischen Ort aller Geraden (2) dar, welche die drei festen Geraden (1) schneidet. Vollzieht man zunächst die Elimination von $\lambda$ und $\mu$ aus (2) und je einer der Gleichungen (3), wie am Schlusse der vorigen Nummer, so ergeben sich die drei linearen Gleichungen in $m$ und $n$:

$$\begin{aligned} m\,U &+ n\,V &+ W &= o \\ m\,U_1 &+ n\,V_1 &+ W_1 &= o \\ m\,U_2 &+ n\,V_2 &+ W_2 &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wo $U, V;\ U_1, V_1;\ U_2, V_2$ die linken Seiten der Gleichungen der festen Geraden (1), nachdem ihre rechten Seiten auf Null gebracht worden sind, bedeuten, und $W, W_1, W_2$ durch die Relationen:

$$\begin{aligned} W &= B\,V - b\,U \\ W_1 &= B_1 V_1 - b_1 U_1 \\ W_2 &= B_2 V_2 - b_2 U_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

definiert sind.

Eliminiert man jetzt aus (4) die Constanten $m$ und $n$, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (5) das Eliminationsresultat:

$$\begin{vmatrix} U, & V, & B\,V - b\,U \\ U_1, & V_1, & B_1 V_1 - b_1 U_1 \\ U_2, & V_2, & B_2 V_2 - b_2 U_2 \end{vmatrix} = o \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Das geometrische Gebilde, welches durch diese Gleichung dargestellt ist, enthält aufser den einfach unendlich vielen Geraden (2) auch die Geraden (1); denn die linke Seite der Gleichung verschwindet identisch für:

$$\begin{matrix} U = o \\ V = o \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} U_1 = o \\ V_1 = o \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} U_2 = o \\ V_2 = o \end{matrix}$$

Ersetzt man die Elemente der Determinante auf der linken Seite von (6) durch ihre Werte in $x, y, z$, so wird jene Gleichung in Bezug auf diese Variabeln vom zweiten Grade. Sie stellt deshalb eine Fläche zweiten Grades dar. Somit haben wir den Satz:

> Wenn eine gerade Linie an drei gegebenen Geraden hingleitet, indem sie dieselben fortwährend schneidet, so erzeugt sie eine Oberfläche zweiter Ordnung.

Läfst man durch den Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ des Raumes eine Gerade gehen, welche mit der Geraden, die an den drei festen Geraden hingleitet, in jeder ihrer Lagen parallel ist, so wird auch eine solche Gerade eine Oberfläche beschreiben, und zwar eine Kegelfläche. Die Gleichung dieser Fläche wird erhalten, wenn man aus nachstehenden Gleichungen der mit (2) parallelen Geraden:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \lambda\,(x - x_0) \\ z - z_0 &= \mu\,(x - x_0) \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

und aus (3) die Gröfsen $m, n, \lambda, \mu$ eliminiert. Zu diesem Zwecke ordnet man die Gleichungen (3) nach $m$ und $n$, eliminiert aus denselben diese Gröfsen, und setzt hierauf in dem Eliminationsresultat:

$$\left|\begin{array}{llll} 1, & \lambda, & \mu, & o \\ 1, & A, & a, & aB - bA + \lambda b - \mu B \\ 1, & A_1, & a_1, & a_1 B_1 - b_1 A_1 + \lambda b_1 - \mu B_1 \\ 1, & A_2, & a_2, & a_2 B_2 - b_2 A_2 + \lambda b_2 - \mu B_2 \end{array}\right| = o$$

die aus (7) sich ergebenden Werte:

$$\lambda = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad \mu = \frac{z - z_0}{x - x_0}$$

so dafs schliefslich

$$\left|\begin{array}{llll} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0, & o \\ 1, & A, & a, & c\,(x-x_0) + b\,(y-y_0) - B\,(z-z_0) \\ 1, & A_1, & a_1, & c_1\,(x-x_0) + b_1\,(y-y_0) - B_1\,(z-z_0) \\ 1, & A_2, & a_2, & c_2\,(x-x_0) + b_2\,(y-y_0) - B_2\,(z-z_0) \end{array}\right| = o$$

als Gleichung der Kegelfläche sich ergibt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$aB - bA = c \qquad a_1 B_1 - b_1 A_1 = c_1 \qquad a_2 B_2 - b_2 A_2 = c_2$$

Daher der Satz:

**Dreht sich eine Gerade so um einen festen Punkt, dafs sie mit einer, an drei festen Geraden hingleitenden, Geraden fortwährend parallel bleibt, so beschreibt sie eine Kegelfläche zweiten Grades.**

Es sollen nun die Beziehungen aufgestellt werden, welche

zwischen den Coordinaten der drei Punkte stattfinden, in welchen die drei festen Geraden (1) von der beweglichen Geraden (2) geschnitten werden.

Sind $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ und $(x_3, y_3, z_3)$ die Schnittpunkte von $L$, beziehungsweise mit $G_1$, $G_2$, $G_3$, dann ist der Inhalt des von diesen drei Punkten gebildeten Dreiecks Null, und es bestehen somit die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = o \quad . \quad . \quad (9)$$

welche die Thatsache konstatieren, dafs die Projectionen des Raumdreiecks den Inhalt Null haben. Beachtet man aber, dafs zufolge der gemachten Annahmen über die Punkte $(x_i, y_i, z_i)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 x_1 + B_1 \quad y_2 = A_2 x_2 + B_2 \quad y_3 = A_3 x_3 + B_3 \\ z_1 &= a_1 x_1 + b_1 \quad z_2 = a_2 x_2 + b_2 \quad z_3 = a_3 x_3 + b_3 \end{aligned} \quad . \quad (10)$$

ist, so gehen die Gleichungen (9) durch Substitution dieser Werte und einfaches Ausrechnen der Determinanten auf ihren linken Seiten über in:

$$\begin{aligned} x_3 \left[(A_3 - A_2) x_2 + (A_1 - A_3) x_1 + (B_1 - B_2)\right] + \left[x_1 x_2 (A_2 - A_1) + \right. \\ \left. + x_1 (B_2 - B_3) + x_2 (B_3 - B_1)\right] = o \\ x_3 \left[(a_3 - a_2) x_2 + (a_1 - a_3) x_1 + (b_1 - b_2)\right] + \left[x_1 x_2 (a_2 - a_1) + \right. \\ \left. + x_1 (b_2 - b_3) + x_2 (b_3 - b_1)\right] = o \end{aligned} \quad (11)$$

Analoge Relationen bestehen zwischen den $y$ und $z$ Coordinaten der Schnittpunkte. Die Gleichungen (11) sind jedoch ausreichend um die gestellte Aufgabe zu lösen. Eliminiert man aus ihnen die Unbekannte $x_3$, so ergibt sich folgende Gleichung zwischen $x_1$ und $x_2$:

$$\gamma x_1 x_2 + \delta x_2 + \alpha x_1 + \beta = o \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{vmatrix} A_1 - A_3, & B_3 - B_2 \\ a_1 - a_3, & b_3 - b_2 \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A_3 - A_2, & B_3 - B_1 \\ a_3 - a_2, & b_3 - b_1 \end{vmatrix} \\ \beta &= \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} \qquad \gamma = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

und wenn man den Faktor $x_2 - x_1$ unterdrückt, der im Eliminationsresultat auftritt. (Aufg. 24.)

Ordnet man die Gleichungen (11) nach $x_2$, so wird ersichtlich, dafs die neuen Gleichungen aus diesen hervorgehen durch gleichzeitige Vertauschung von $x_3$, $A_3$, $B_3$, $a_3$, $b_3$ mit $x_2$, $A_2$, $B_2$, $a_2$, $b_2$. Das Resultat, welches sich durch Elimination von $x_2$ aus den (11) ergibt, mufs also auch aus der (12) erhalten werden, dadurch, dafs man die genannten Vertauschungen in dieser Gleichung vornimmt. Durch eine solche Vertauschung ändern sich aber nur die Coëfficienten $\alpha$ und $\delta$ dem Werte nach, während $\beta$ und $\gamma$ lediglich das Vorzeichen wechseln. Es ist das Eliminationsresultat also:

$$\gamma x_1 x_3 + \delta' x_3 + \alpha' x_1 + \beta = o \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wenn gesetzt wird:

$$\delta' = \begin{vmatrix} A_2 - A_3, & B_2 - B_1 \\ a_2 - a_3, & b_2 - b_1 \end{vmatrix} \qquad \alpha' = \begin{vmatrix} A_2 - A_1, & B_2 - B_3 \\ a_2 - a_1, & b_2 - b_3 \end{vmatrix} \quad (14^a)$$

Dabei ist zu bemerken, dafs die Beziehung stattfindet:

$$\alpha + \delta = \alpha' + \delta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Gleichungen (12) und (15) gestatten nun mit leichter Mühe die Coordinaten der Schnittpunkte von $L$ mit $G_1$, $G_2$ und $G_3$ zu berechnen. Da nämlich nach (66) die Lage von $L$ durch einen einzigen Punkt auf einer dieser drei Geraden bestimmt ist, so liefern die (12) und (15), wenn die Coordinaten jenes Punktes gegeben sind, die $x$ Coordinaten der Schnittpunkte auf den beiden andern Geraden. Ist z. B. $(x_1, y_1, z_1)$ gegeben, so liefert die (12) das dem Punkte $(x_2, y_2, z_2)$ auf $G_2$ zugehörige $x_2$, und die (14) das dem Punkte $(x_3, y_3, z_3)$ auf $G_3$ zugehörige $x_3$. Setzt man diese Werte dann in die (1), so finden sich die noch fehlenden $y$ und $z$ Coordinaten der betreffenden Punkte.

Da es in vielen Fällen wünschenswerth ist, auch die Gleichungen zu besitzen, durch welche die $y$ und $z$ Coordinaten der Punkte, in welchen eine bewegliche Gerade drei feste Gerade schneidet, verbunden sind, so wollen wir auch diese Gleichungen ableiten. Zu diesem Zwecke könnten wir die erste Reihe der Gleichungen (1) nach den $x$ auflösen, und die sich ergebenden Werte in (12) und (14) substituieren. Wir erhielten dann die auf

die $y$ Coordinaten bezüglichen Gleichungen; die auf die $z$ Coordinaten bezüglichen würden auf gleiche Weise durch Auflösung der Gleichungen in der zweiten Reihe von (1) nach $x_1, x_2, x_3$ und Substitution der resultierenden Werte in die (12) und (14) erhalten werden.

Dies Verfahren wäre jedoch wenig elegant und lieferte Resultate, die nur einen schwerfälligen Gebrauch gestatteten. Wir schlagen deshalb folgenden einfachen Weg ein, der es ermöglicht, das Resultat ohne weiteres anzuschreiben. — In den Gleichungen (1) sind $x_1, x_2, x_3$ die unabhängig Veränderlichen. Wir schreiben dieselben nun um, so dafs das einemal die $y$, das anderemal die $z$ die unabhängig Veränderlichen sind.

Im ersten Falle erhalten die Gleichungen (1) die Gestalt:

$$\begin{aligned} x_i &= P_i\, y_i + Q_i \\ z_i &= p_i\, y_i + q_i \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

wenn man setzt:

$$P_i = \frac{1}{A_i} \quad Q_i = -\frac{B_i}{A_i} \quad \frac{a_i}{A_i} = p_i \quad \frac{b_i A_i - a_i B_i}{A_i} = q_i \quad (17)$$

Aus den (16) werden die Gleichungen der drei Geraden $G_1, G_2, G_3$ erhalten, wenn man nacheinander dem Index $i$ die Werte 1, 2, 3 gibt. Die (17) liefert bei demselben Verfahren die Constanten von (16). Da nun die letzteren Gleichungen dieselbe Form haben wie die (1), so werden die den Gleichungen (11) entsprechenden Gleichungen erhalten, wenn statt der Gröfsen

$$x_1, x_2, x_3, \quad A_1, A_2, A_3, \quad a_1, a_2, a_3, \quad B_1, B_2, B_3, \quad b_1, b_2, b_3$$

der Reihe nach gesetzt wird:

$$y_1, y_2, y_3, \quad P_1, P_2, P_3, \quad p_1, p_2, p_3, \quad Q_1, Q_2, Q_3, \quad q_1, q_2, q_3$$

Daraus ergibt sich aber dann, dafs

$$\begin{aligned} \gamma_1 y_1 y_2 + \delta_1 y_2 + \alpha_1 y_1 + \beta_1 &= o \\ \gamma_1 y_1 y_3 + \delta_1' y_3 + \alpha_1' y_1 + \beta_1 &= o \end{aligned} \quad \ldots \quad (18)$$

die gesuchten Gleichungen für die $y$ sind, wo die Constanten $\gamma_1, \delta_1, \alpha_1, \beta_1, \delta_1', \alpha_1'$ aus den entsprechenden Constanten (13) und ($14^a$) durch Vornahme derselben Vertauschungen hervorgehen.

Im zweiten Falle macht man die $z$ zu den unabhängig Veränderlichen. Dies gibt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_i &= R_i z_i + S_i \\ y_i &= r_i z_i + s_i \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

wenn ist:

$$R_i = \frac{1}{a_i} \quad S_i = \frac{b_i}{a_i} \quad r_i = \frac{A_i}{a_i} \quad s_i = \frac{b_i A_i - a_i B_i}{a_i} \quad (20)$$

und wenn wiederum $i = 1, 2, 3$ gesetzt wird. Vertauscht man die Gröfsen

$$x_1, x_2, x_3, \quad A_1, A_2, A_3, \quad a_1, a_2, a_3, \quad B_1, B_2, B_3, \quad b_1, b_2, b_3$$

der Reihe nach mit den Gröfsen

$$z_1, z_2, z_3, \quad R_1, R_2, R_3, \quad r_1, r_2, r_3, \quad S_1, S_2, S_3, \quad s_1, s_2, s_3$$

so ergeben sich aus (12) und (14) die gesuchten Formeln für die $z$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 z_1 z_2 + \delta_2 z_2 + \alpha_2 z_1 + \beta_2 &= o \\ \gamma_2 z_1 z_3 + \delta_2' z_3 + \alpha_2' z_1 + \beta_2 &= o \end{aligned} \quad \ldots \quad (21)$$

Die Constanten in denselben werden aus den Ausdrücken für die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Constanten (13) und (14[a]) erhalten, dadurch, dafs man die Elemente jener Determinanten durch andere ersetzt, den soeben angegebenen Vertauschungen gemäs. Die der (15) analogen Bedingungen für die Constanten der mittleren Glieder in (18) und (21) sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1' + \delta_1' &= \alpha_1 + \delta_1 \\ \alpha_2' + \delta_2' &= \alpha_2 + \delta_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Die Hervorhebung dieser Bedingungen zwischen den Constanten $\alpha$ und $\delta$ ist deshalb erforderlich, weil man ohne sie bei Beantwortung der Frage, ob es unter den Geraden des Systems $L$ auch solche gibt, welche parallel mit einer der Coordinatenebenen sind, auf Widersprüche stofsen würde (Aufg. 25).

Die Gleichungen (12), (18) und (21) werden von aufserordentlicher Wichtigkeit, wenn zwischen den Variabeln in denselben die Beziehungen (10) nicht mehr statt haben, so dafs wir diesen Gleichungen ein besonderes Kapitel widmen werden. An dieser

Stelle soll nur noch ein Gebrauch von Formel (12) behufs Construction der Geraden $L$ gemacht werden.

Die Formeln (12) setzen uns nämlich in Stand, die Coordinaten der Durchstofspunkte sämtlicher Geraden $L$ mit den drei Coordinatenebenen zu berechnen. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine jede Gerade $L$ bestimmt durch zwei Punkte; den einen davon, $(x_1, y_1, z_1)$, nehmen wir auf $G_1$ an, den andern, $(x_2, y_2, z_2)$ auf $G_2$. Die Coordinaten des letzteren sind dann bestimmt durch die erste der Formeln (12) und durch das zweite Paar des Gleichungssystems (10).

Es werden nun aus (**60.**$_2$) die Coordinaten $x$ und $y$ des Durchstofspunktes der Geraden $L$, mit der $x\,y$ Ebene erhalten, wenn man in jenen Formeln für $y_2, z_2, y_1, z_1$ ihre Werte aus (10) substituiert. Dieselben sind daher:

$$x = \frac{x_1\,x_2\,(a_2 - a_1) + b_2\,x_1 - b_1\,x_2}{a_2\,x_2 - a_1\,x_1 + b_2 - b_1}$$

$$y = \frac{x_1 x_2(A_1 a_2 - a_1 A_2) + x_1(A_1 b_2 - a_1 B_2) + x_2(a_2 B_1 - b_1 A_2) + b_2 B_1 - b_1 B_2}{a_2\,x_2 - a_1\,x_1 + b_2 - b_1}$$

Setzt man hierin aus der ersten der Gleichungen (12) $x_2$ als Funktion von $x_1$, nämlich

$$x_2 = -\frac{\alpha\,x_1 + \beta}{\gamma\,x_1 + \delta}$$

so nehmen diese Coordinatenausdrücke die Form an:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_1'\,x_1^2 + \lambda_2'\,x_1 + \lambda_3'}{\mu_1'\,x_1^2 + \mu_2'\,x_1 + \mu_3'} \\ y &= \frac{\nu_1'\,x_1^2 + \nu_2'\,x_1 + \nu_3'}{\mu_1'\,x_1^2 + \mu_2'\,x_1 + \mu_3'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

Die Werte der Constanten $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ als Funktionen der Constanten in den Gleichungen (10) sind in Aufg. 26 berechnet. Die Durchstofspunkte in der $x\,z$ Ebene werden nach (**60.**$_3$) erhalten, wenn man in den dort gegebenen Ausdrücken an Stelle von $y_1, y_2, z_1, z_2$ ihre Werte aus (10) setzt und hierauf wiederum $x_2$ durch $x_1$ ausdrückt:

$$x = \frac{\lambda_1'' x_1^2 + \lambda_2'' x_1 + \lambda_3''}{\mu_1'' x_1^2 + \mu_2'' x_1 + \mu_3''}$$
$$z = \frac{\nu_1'' x_1^2 + \nu_2'' x_1 + \nu_3''}{\mu_1'' x_1^2 + \mu_2'' x_1 + \mu_3''} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Die Coordinaten der Durchstofspunkte in der $y\,z$ Ebene endlich haben die Form:

$$y = \frac{\lambda_1''' x_1^2 + \lambda_2''' x_1 + \lambda_3'''}{\mu_1''' x_1^2 + \mu_2''' x_1 + \mu_3'''}$$
$$z = \frac{\nu_1''' x_1^2 + \nu_2''' x_1 + \nu_3'''}{\mu_1''' x_1^2 + \mu_2''' x_1 + \mu_3'''} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Eliminiert man aus den (24) $x_1$ und ebenso aus den (25) und (26), so erhält man drei quadratische Gleichungen in $x$, $y$, beziehungsweise $x$, $z$ und $y$, $z$. Es liegen somit die Durchstofspunkte aller Geraden $L$ mit einer Coordinatenebene in einer Curve zweiten Grades.

Um also jetzt eine Gerade $G$ zu construieren, welche drei feste Gerade $G_1$, $G_2$, $G_3$ schneidet, wählt man auf einer der letzteren, z. B. auf $G_3$, einen beliebigen Punkt $P$, und verfährt, wie am Schlusse von (**66**) angegeben, indem man durch $P$ an $G_2$ und $G_1$ die einzige mögliche Gerade zieht, oder man berechnet nach (24), (25) und (26) die Coordinaten der Durchstofspunkte einer Geraden $L$ für zwei Coordinatenebenen und trägt sie in die Zeichnungsebene ein. Da jedoch ein Punkt der Geraden $L$ immer beliebig auf einer der Geraden, z. B. $G_1$, angenommen werden kann, so hat man nur einen ihrer Durchstofspunkte nötig, um dieselbe zu zeichnen. Es genügen also die Formeln (24), um sämtliche Gerade $L$ zu zeichnen.

Soll die Gerade (2), aufser durch die festen Geraden (10), auch noch durch die Gerade, deren Gleichungen

$$y = A_4 x + B_4 \qquad z = a_4 x + b_4$$

sind, gehen, dann haben $\lambda$, $\mu$, $m$, $n$ die vier Bedingungen, welche man aus

$$(m - B_i)\ (a_i - \mu) - (n - b_i)\ (A_i - \lambda) = o$$

erhält, für $i = 1, 2, 3, 4$, zu erfüllen, welche vier Gleichungen zu-

sammen $\lambda$, $\mu$, $m$, $n$ vollständig bestimmen. Um dieselben aufzulösen, subtrahiert man die erste Gleichung nacheinander von den drei übrigen. Auf diese Weise entstehen drei lineare Gleichungen in $\lambda$, $\mu$, $m$, $n$, welche drei der Unbekannten durch die vierte auszudrücken gestatten.

Substituiert man dann die erhaltenen Werte in eine der vier Gleichungen, so ergibt sich, da letztere die Produkte $\lambda m$, $\mu n$ enthalten, eine quadratische Gleichung in der vierten Unbekannten. Daher der Satz:

Es gibt zwei Gerade, welche vier feste Gerade zugleich schneiden.

Die Aufgabe, die Coordinaten der Schnittpunkte der zwei Geraden zu bestimmen, welche vier feste Gerade zugleich schneiden, ist nach dem Vorausgeschickten leicht zu lösen. Sind nämlich $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ die vier festen Geraden, so liefert die Combination der Geraden $G_1$, $G_2$, $G_3$ eine Schaar von geraden Linien $L$, für deren Schnittpunkte mit $G_1$ und $G_2$ die Gleichung

$$x_2 = -\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

besteht, und die Combination der Geraden $G_1$, $G_2$, $G_4$ liefert eine Schaar von Geraden $L'$, deren Schnittpunkte mit $G_1$ und $G_2$ durch die Gleichung

$$x_2' = -\frac{\alpha' x_1' + \beta'}{\gamma' x_1' + \delta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

verbunden sind.

Die Gleichung (27) besteht also für jede Gerade $L$, welche $G_1$, $G_2$, $G_3$ schneidet, und die Gleichung (28) besteht für jede Gerade $L'$, welche $G_1$, $G_2$, $G_4$ schneidet. Ordnet man nun immer zwei solche Gerade $L$ und $L'$ einander zu, deren Schnittpunkte auf $G_2$ zusammenfallen, also jene Geraden, die aus einem beliebigen Punkte von $G_2$ an $G_1$ und $G_3$, beziehungsweise $G_1$ und $G_4$, sich legen lassen, so schneiden zwei zugeordnete Gerade auf $G_1$ zwei Punkte aus, deren $x$ Coordinaten wegen $x_2 = x_2'$ durch die Gleichung

$$\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} = \frac{\alpha' x_1' + \beta'}{\gamma' x_1' + \delta'} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

verknüpft sind.

Sollen nun die beiden Geraden $L$ und $L'$ zusammenfallen, so mufs $x_1 = x_1'$ sein. Somit gibt die Gleichung

$$\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} = \frac{\alpha' x_1 + \beta'}{\gamma' x_1 + \delta'} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

die $x$ Coordinaten der Schnittpunkte von $G_1$ mit jenen Geraden, welche die vier Geraden $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ zugleich schneiden. Aus den Gleichungen der letzteren ergeben sich dann die übrigen Coordinaten der Schnittpunkte, wenn man zuvor noch $x_3$ und $x_4$ berechnet hat mit Hilfe der zweiten Gleichung (12) und der ihr für die Gerade $G_4$ entsprechenden Gleichung:

$$\gamma_4 x_1 x_4 + \delta_4 x_4 + \alpha_4 x_1 + \beta_4 = o$$

Die Gleichung (29) definiert eine lineare Verwandtschaft zwischen den Punkten der Geraden $G_1$, welche man Projectivität nennt. Man sagt, die einander zugeordneten Geraden $L$ und $L'$ schneiden auf $G_1$ zwei Punktreihen aus, welche projectivisch zu einander sind. Schreibt man die (29) in der Form:

$$x_1 x_1' (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + x_1' (\beta\gamma' - \alpha'\delta) + x_1 (\alpha\delta' - \beta'\gamma) + \beta\delta' - \beta'\delta = o$$

so erkennt man, dafs die Verwandtschaft der Projectivität jene der Affinität in sich begreift. Denn für $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = o$ nimmt vorstehende Gleichung die Gestalt der (**47**$_7$) an.

Die (**30**) bestimmen die Doppelelemente der beiden auf $G_1$ liegenden projectivischen Punktreihen, beziehungsweise die $x$ Coordinaten derselben. Die $y$ und $z$ Coordinaten der Doppelelemente werden aus dem ersten Gleichungspaare (10) erhalten. Dies führt zu einer rein geometrischen Construction der Geraden, welche vier gegebene Gerade zugleich schneiden. Legt man nämlich durch einen dieser Doppelpunkte die einzige mögliche Gerade an $G_2$ und $G_3$, so schneidet dieselbe auch die Gerade $G_4$. Es kommt also die Construction der genannten Geraden auf die Construction der Doppelpunkte zweier zusammenfallender projectivischer Punktreihen hinaus, welche sich mittelst eines Kreises immer ausführen läfst, wie wir später zeigen werden. (A. G. d. E. S. 188.)

## 69.

**Graphische Darstellung einer Geraden im Raume.** Die Projectionen einer Raumgeraden, welche durch zwei Punkte gegeben ist, werden erhalten, wenn man die Projectionen dieser Punkte durch Gerade verbindet.

Ist die zu zeichnende Raumgerade durch einen Punkt und ihre Richtung gegeben, so zeichnet man nach (**25**) die Projectionen einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden, welche mit den Axen die gegebenen Winkel bildet, und aufserdem die Projectionen des gegebenen Punktes. Zieht man dann durch die letzteren mit den gleichnamigen Projectionen der ersteren Parallele, dann sind dies die Projectionen der gesuchten Geraden.

Wenn die Raumgerade durch die Gleichungen ihrer projicierenden Ebenen gegeben ist, dann construiert man eben einfach die gleichzeitig durch diese Gleichungen dargestellten Geraden in den betreffenden Coordinatenebenen.

Der Fall, dafs die Raumgerade durch zwei ihrer Durchstofspunkte gegeben ist, ist ein Spezialfall des zuerst behandelten, indem immer zwei Projectionen eines Durchstofspunktes auf die Axen der Ebene, in welcher der Durchstofspunkt gegeben ist, zu liegen kommen. Sind z. B. die Durchstofspunkte $d_1$ und $d_3$ einer Geraden mit den Ebenen der $xy$ und $yz$ gegeben, so fällt die dritte Projection $d_1'''$ von $d_1$ in die $y$ Axe und die zweite Projection $d_1''$ in die $x$ Axe. Die erste Projection $d_3'$ des Punktes $d_3$ fällt ebenfalls in die $y$ Axe, und die zweite $d_3''$ in die $z$ Axe. Es sind also $d_1'$, $d_1''$, $d_1'''$ die Projectionen des Punktes $d_1$ und $d_3'$, $d_3''$, $d_3'''$ die Projectionen des Punktes $d_3$ und folglich sind $g'$ und $g'''$ die Projectionen der durch ihre Durchstofspunkte $d_1$ und $d_3$ gegebenen Geraden $g$.

In Fig. 55 ist die räumliche Construction der Geraden $G$ nach folgenden Überlegungen durchgeführt worden.

Die Gerade $G$ sei gegeben durch ihre Durchstofspunkte mit der $xy$ und $xz$ Ebene, $d_1$ und $d_2$. Will man nun ihre Projectionen $G'$ und $G''$ zeichnen, so geschieht dies dadurch, dafs man durch $G$ die drei projicierenden Ebenen legt. Die erste, welche mit der $z$ Axe parallel ist, schneidet die $x$, beziehungsweise $y$ Axe

in den Projectionen $d_2'$ und $d_3'$ von $d_2$ und $d_3$. Die Verbindungsgerade dieser Punkte, welche notwendig durch $d_1$ geht, ist die Projection $G'$ von $G$. Die zweite mit der $y$ Axe parallele projicierende Ebene schneidet die $x$ und $z$ Axe in den Projectionen $d_1''$ und $d_3''$ von $d_1$ und $d_3$. Die Verbindungsgerade von $d_1''$ und $d_3''$, welche selbstverständlich durch $d_2$ geht, ist die Projection $G''$ von $G$. Legt man endlich die dritte, der $x$ Axe parallele, projicierende Ebene durch $G$, so schneidet diese die $y$ und $z$ Axe beziehungsweise in den Projectionen $d_1'''$ und $d_2'''$ von $d_1$ und $d_2$. Es ist also die Verbindungsgerade von $d_1'''$ und $d_2'''$ die Projection $G'''$ von $G$. Auf ihr liegt der dritte Durchstofspunkt $d_3$.

Aus dieser räumlichen Construction der drei Projectionen einer Geraden $G$ ergibt sich nun sofort die Darstellung in der als Zeichnungsebene gewählten Coordinatenebene der $x\,y$, wenn man die $x\,z$ Ebene durch Drehung um die $x$ Axe und die $y\,z$ Ebene durch Drehung um die $y$ Axe in diese umklappt; die Figur 55 geht dadurch in Figur 56 über.

In (**49**) ist gezeigt worden, dafs wenn man die Gerade $G$ als Träger einer Punktreihe auffafst, diese Punktreihe zu ihren Projectionen $G'$, $G''$, $G'''$ und letztere unter sich affin sind.

Was zunächst die Affinitäten $G$, $G'$; $G$, $G''$ und $G$, $G'''$ anbelangt, so erkennt man augenblicklich, dafs die Durchstofspunkte $d_1$, $d_2$, $d_3$ die beziehungsweisen Affinitätspunkte derselben sind; $d_2$, $d_2'$ und $d_3$, $d_3'$ sind zwei Punktepaare der ersten Affinität, $d_1$, $d_1''$ und $d_3$, $d_3''$ zwei Punktepaare der zweiten, endlich $d_1$, $d_1'''$ und $d_2$, $d_2'''$ zwei Punktepaare der dritten Affinität. Ebenso sind $a$, $a'$; $a$, $a''$; $a$, $a'''$ Punktepaare, beziehungsweise der ersten, zweiten und dritten Affinität.

Projiciert man die Punktreihen $G$, $G'$, $G''$ auf die $x$ Axe, so ergibt sich auf derselben jedesmal dieselbe Punktreihe $G_x$. Die drei Projectionen werden nämlich gleichzeitig hergestellt dadurch, dafs man durch jeden Punkt $a$ von $G$ die projicierende Ebene senkrecht zur $x$ Axe legt. Bezeichnet $a_x$ die Projection von $a$ auf diese Axe, so ist also auch $a_x$ die Projection von $a'$ und $a''$.

Legt man durch $a$ die projicierende Ebene senkrecht zur $y$ Axe, so erkennt man, dafs $a_y$ gleichzeitig die Projection von $a$, $a'$ und $a'''$ ist.

Legt man endlich durch $a$ die projicierende Ebene senkrecht zur $z$ Axe, so erscheint $a_z$ gleichzeitig als Projection von $a$, $a''$ und $a'''$.

Darnach sind also $a'$ und $a''$ zugeordnete Punkte der affinen Punktreihen $G'$ und $G''$, ferner $a'$ und $a'''$ zugeordnete Punkte der affinen Punktreihen $G'$ und $G'''$ und ebenso $a''$ und $a'''$ zugeordnete Punkte der affinen Punktreihen $G''$ und $G'''$. —

Aus der Construktion geht weiter hervor, dafs $a^x$, $a$; $a_x$, $a'$, $a_x$, $a''$ Punktepaare der Affinitäten $G_x\ G$, $G_x\ G'$, $G^x\ G''$ sind. Analoges gilt für die zu $a_y$ und $a_z$ gehörigen Punkte.

In (**50**) ist bewiesen worden, dafs die Punktreihen $G^x$, $G_y$, $G_z$ zueinander affin sind. Es sind also $a_x$, $a_y$; $a_x$, $a_z$; $a_y$, $a_z$ Punktepaare, beziehungsweise der Affinitäten $G_x$, $G_y$; $G_x$, $G_z$; $G_y$, $G_z$ und die Gleichungen (**50**.$_{12}$) geben die Beziehungen zwischen den Coordinaten der Punkte eines Paares. Die gleiche Bedeutung kommt den Gleichungen (**55**.$_3$) zu, wenn man denselben die Gleichung zufügt, die durch Elimination von $x$ aus ihnen erhalten wird.

Um zu jedem Punkte $a_x$ der Punktreihe $G_x$ den entsprechenden Punkt $a_y$ der Punktreihe $G_y$ zu construieren, bedarf es der Kenntnis zweier Punktepaare. Als solche wählt man gewöhnlich die Punktepaare $a_x = o$, $a_y = b$ und $a_x = -\frac{b}{a}$, $a^y = o$.

Es sind dies bekanntlich die Punkte, in welchen die Gerade

$$y = a\,x + b$$

die Coordinatenaxen der $x$ und $y$ schneidet. Zeichnet man dann diese Gerade und construiert zur Abscisse des Punktes $a_x$ die Ordinate, so schneidet eine durch den Endpunkt derselben mit der $x$ Axe gezogene Parallele die $y$ Axe in dem $a_x$ affin zugeordneten Punkte $a_y$. Die Construction einer Geraden mit Hilfe ihrer Abschnitte auf den Axen beruht also im letzten Grunde auf der Affinität, welche durch die Gleichung der Geraden definiert ist. — Ist die Affinität aber nicht durch eine Gleichung gegeben, sondern rein geometrisch durch zwei Punktepaare bestimmt, so kommt die Construction, welche im fünften Absatz von (**51**) gelehrt wurde, zur Anwendung. Man erkennt, dafs diese Construction identisch ist mit der Construction einer Geraden, von welcher zwei Punkte gegeben sind.

## 70.

**Coordinaten einer Geraden.** Eine jede der verschiedenen Bestimmungsweisen einer Raumgeraden kann die Grundlage abgeben für die Definition jener Zahlen, die man die Coordinaten der Raumgeraden nennt. Eine dieser Definitionen ist bereits in (**48**) gegeben worden. Eine zweite Definition findet sich am Schlusse von (**60**). Die letztere ist es, mit der wir uns zunächst näher befassen wollen, um dann zu jener Definition der Coordinaten einer Raumgeraden überzugehen, welche sich auf die Bestimmungsweise derselben durch ihre orthogonalen Projectionen gründet, und welche daher zusammenfällt mit der Definition der Coordinaten einer Geraden in der Ebene.

Wir wollen zu diesem Zwecke von folgender allgemein angenommener Bezeichnung der am Schlusse von (**60**) aufgeführten Gröfsen Gebrauch machen:

$$\begin{aligned} p_{14} &= x_2 - x_1 & p_{24} &= y_2 - y_1 & p_{34} &= z_2 - z_1 \\ p_{23} &= y_2 z_1 - y_1 z_2 & p_{13} &= x_1 z_2 - x_2 z_1 & p_{12} &= x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Für dieselben bestehen die Proportionen:

$$\begin{aligned} p_{14} : p_{24} : p_{34} &= \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma \\ p_{23} : p_{13} : p_{12} &= \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die Identität (**60.**$_{13}$) erhält folgendes Aussehen:

$$p_{14} p_{23} + p_{24} p_{13} + p_{34} p_{12} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Was zunächst die drei Gröfsen $p_{14}$, $p_{24}$, $p_{34}$ anbelangt, so können dieselben nach (**37**) als Coordinaten einer Strecke aufgefafst werden. Diese drei Gröfsen stellen dann dreifach unendlich viele Strecken dar, die zu einander äquipollent sind. Eine jede solche Strecke bestimmt aber eine Gerade, und zwar gibt es immer einfach unendlich viele, sich nur durch die Lage von einander unterscheidende, Strecken mit den Coordinaten $p_{14}$, $p_{24}$, $p_{34}$, welche dieselbe Gerade bestimmen, nämlich alle jene Strecken, deren verschiedene Lagen durch Verschiebung einer der Strecken in der Geraden erhalten werden. Somit sind durch die drei Zahlen zweifach unendlich viele Gerade bestimmt, die alle zu einander parallel sind. Um aus dieser zweifach unendlichen Anzahl von Geraden eine

bestimmte herauszugreifen, sind noch zwei Zahlen erforderlich. Als solche wählen wir zwei der Zahlen $p_{23}$, $p_{13}$, $p_{12}$. Dieselben stellen nach (**34**) die Projectionen des Raumdreiecks dar, dessen Grundlinie die durch die Zahlen $p_{14}$, $p_{24}$, $p_{34}$ bestimmte Strecke $s$, und dessen Spitze der Coordinatenanfang ist. Wir nennen deshalb $p_{23}$, $p_{13}$, $p_{12}$ die Coordinaten dieses Raumdreiecks.

Die Construction der Raumgeraden mit Hilfe der genannten Zahlen geschieht dann folgendermafsen:

Man wählt auf zwei der Coordinatenaxen, etwa der $x$ und $y$ Axe, die Strecken $p_{14}$ und $p_{24}$ in beliebiger Lage, und construiert in der $x\,y$ Ebene die Strecke

$$s' = \sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2}$$

Dieselbe bestimmt eine Gerade in der $x\,y$ Ebene, und wenn man die Lagen von $p_{14}$ und $p_{24}$ ändert, erhält man eine einfach unendliche Schaar paralleler Geraden in der $x\,y$ Ebene. Unter diesen sucht man nun jene Gerade heraus, welche den Abstand

$$h_{12} = \frac{p_{12}}{s'}$$

vom Coordinatenanfang hat, dann ist dies die Projection der Raumgeraden auf die $x\,y$ Ebene.

Auf gleiche Weise bestimmt man mittelst der Zahlen

$$p_{14},\quad p_{34},\quad s'' = \sqrt{p_{14}^2 + p_{34}^2} \qquad h_{13} = \frac{p_{13}}{s''}$$

die Projection der Raumgeraden auf die $x\,z$ Ebene. Hat man auch die dritte Projection der Raumgeraden nötig, so geschieht ihre Construction mittelst der Zahlen

$$p_{24},\quad p_{34},\quad s''' = \sqrt{p_{24}^2 + p_{34}^2} \qquad h_{23} = \frac{p_{23}}{s'''}$$

Aus (**26**) ergibt sich, dafs die durch die drei Zahlen $p_{14}$, $p_{24}$, $p_{34}$ der Gröfse und Richtung nach bestimmte Strecke $s$ parallel ist dem Strahle, welcher vom Coordinatenanfang aus gezogen mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinuse sich wie jene drei Zahlen verhalten.

Die Länge der Strecke ist daher:

$$s = \sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Legt man nun durch den genannten Strahl eine Ebene, deren Normale mit den Axen die Winkel $\lambda, \mu, \nu$ bildet, so hat man unter allen Geraden, welche in dieser Ebene parallel jenem Strahle gezogen werden können, jene heraus zu suchen, deren Abstand $h$ von ihm gegeben ist durch

$$h = \sqrt{\frac{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2}{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wobei immer das positive Vorzeichen der Quadratwurzel zu nehmen ist. Vorstehenden Wert von $h$ erhält man durch Projection des Raumdreiecks mit der Grundlinie $s$ und der Höhe $h$ auf die Coordinatenebenen, also aus den Formeln:

$$p_{12} = h\, s \cos\nu \qquad p_{13} = h\, s \cos\mu \qquad p_{23} = h\, s \cos\lambda$$

durch Quadrieren und Addieren und unter Benutzung von (4).

Das häufige Auftreten der sechs Gröfsen (1) in der analytischen Geometrie des Raumes hat dazu veranlafst, denselben den Namen der Coordinaten einer Raumgeraden zu geben, oder sie kurz Liniencoordinaten zu nennen. Da die sechs Gröfsen (1) der Identität (3) genügen, so kann man einen Schritt weiter machen, und unter den Coordinaten einer Raumgeraden sechs beliebig ausgewählte Gröfsen verstehen, welche die Identität (3) befriedigen, und von der Entstehungsweise der Liniencoordinaten aus den Coordinaten zweier Punkte ganz absehen. Man betrachtet dann die Liniencoordinaten als selbständige Veränderliche, welche der Identität (3) zu genügen haben.

Behufs allgemeiner analytischer Untersuchungen ist diese Festsetzung auch vollkommen ausreichend. Sobald es sich aber um die geometrische Darstellung eines Raumgebildes, welches durch Gerade erzeugt ist, handelt, mufs noch darüber eine Bestimmung getroffen werden, welche der sechs beliebig gewählten Zahlen als $p_{12}$, welche als $p_{13}$ u. s. w. aufzufassen ist. Sind z. B. $a, b, c, d, e, f$ sechs beliebig gewählte Zahlen, so kann es möglich sein, dafs dieselben auf mehrfache Weise in drei Producte zu je zwei Factoren sich vereinigen lassen, so, dafs die Summe dieser Producte identisch verschwindet, und dafs es demnach mehrere Raumgeraden gibt, deren Coordinaten jene Zahlen sind. Man

entgeht diesen Zweideutigkeiten, wenn man den allgemeinen Begriff der Liniencoordinaten immer durch $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ darstellt, analog dem Verfahren, nach welchem der allgemeine Begriff der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes durch $x, y, z$ bezeichnet wird. Um also auszudrücken, dafs $a, b, c, d, e, f$ die Coordinaten einer Raumgeraden sind, mufs man schreiben:

$$\begin{array}{lll} p_{12} = a & p_{13} = b & p_{23} = d \\ p_{14} = c & p_{24} = e & p_{34} = f \end{array}$$

wenn gleichzeitig die Bedingung erfüllt ist:

$$af + be + cd = o$$

Es ist einleuchtend, dafs die Gerade, deren Coordinaten auf diese Weise gegeben sind, nach dem obigen Verfahren construiert werden kann. Man kann jedoch auch folgenden Weg einschlagen. Nach (**60**) sind nämlich die Verhältnisse:

$$\begin{array}{lll} x' = \dfrac{p_{13}}{p_{34}} & x'' = -\dfrac{p_{28}}{p_{24}} & y''' = \dfrac{p_{12}}{p_{14}} \\ y' = -\dfrac{p_{23}}{p_{24}} & z'' = \dfrac{p_{23}}{p_{24}} & z''' = -\dfrac{p_{13}}{p_{14}} \end{array} \quad (6)$$

die Coordinaten der Durchstofspunkte der Raumgeraden mit den Coordinatenebenen. Behufs Construction der Raumgeraden aus sechs Zahlen $a, b, c, d, e, f$, die der Identität (3) genügen, hat man also die Durchstofspunkte zu zeichnen mit Hilfe ihrer Coordinaten:

$$\frac{b}{f}, -\frac{d}{f}; \quad \frac{d}{e}, -\frac{a}{e}; \quad \frac{a}{c}, -\frac{b}{c}$$

oder, wenn man die Darstellung in der Ebene ausführen will und also die $xz$ Ebene in die Zeichenebene umklappt, mit Hilfe von:

$$\frac{b}{f'}, -\frac{d}{f'}; \quad \frac{d}{e'}, -\frac{a}{e}$$

Ersetzt man die Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, aus deren Coordinaten die Linienordinaten abgeleitet sind durch irgend zwei andere Punkte der Raumgeraden, setzt man also in (1) statt $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$ die linearen Combinationen

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, & \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, & \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, & \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 \end{array}$$

wo ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

und bezeichnet die neuen Ausdrücke für die Liniencoordinaten mit $p_{14}'$, $p_{24}'$, $p_{34}'$, $p_{12}'$, $p_{13}'$, $p_{23}'$, so hat man wegen

$$\mu_2 - \lambda_2 = -(\mu_1 - \lambda_1) = m$$

zunächst:

$$p_{14}' = m p_{14} \qquad p_{24}' = m p_{24} \qquad p_{34}' = m p_{34} \quad . \quad (7)$$

Ferner ergibt sich:

$$p_{23}' = \begin{vmatrix} \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, & \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, & z_1 \\ y_2, & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1, & \mu_2 \\ \lambda_1, & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$p_{13}' = \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, & \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & z_1 \\ x_2, & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \\ \mu_1, & \mu_2 \end{vmatrix}$$

$$p_{12}' = \begin{vmatrix} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, & \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, & \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1, & \mu_2 \\ \lambda_1, & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} \mu_1, & \mu_2 \\ \lambda_1, & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \mu_2, & \mu_2 \\ 1 - \lambda_2, & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \mu_2 = -m$$

Daher hat man:

$$p_{23}' = m p_{23} \qquad p_{13}' = m p_{13} \qquad p_{12}' = m p_{12} \quad . \quad (8)$$

Wenn also sechs Zahlen gegeben sind, welche eine Raumgerade bestimmen, so ist dieselbe Raumgerade auch durch sechs andere Zahlen bestimmt, welche den ersteren proportional sind.

Wir definieren daher jetzt:

> Unter den Coordinaten einer Raumgeraden versteht man sechs Zahlen, welche der Identität (3) genügen und von denen drei proportional sind den Coordinaten einer beliebigen in der Geraden angenommenen Strecke, und drei proportional sind den doppelten Inhalten der Projectionen des von jener Strecke und dem Ursprunge gebildeten Dreiecks.

Die Gleichungen (**53**.$_{11}$) der Projectionen einer durch zwei Punkte bestimmten Raumgeraden können mit Hilfe der Coordinaten (1) einer Raumgeraden wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} p_{24}\,x - p_{14}\,y + p_{12} &= o \\ p_{34}\,y - p_{24}\,z + p_{23} &= o \\ p_{14}\,z - p_{34}\,x + p_{13} &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Aus den linken Seiten dieser Gleichungen erkennt man, dafs die Coëfficienten in denselben, wenn man von den Vorzeichen absieht, die oben definierten Liniencoordinaten sind. Auch die Identität (3) läfst sich aus denselben herleiten. Multipliciert man nämlich die Gleichungen der Reihe nach mit $p_{34}$, $p_{14}$, $p_{24}$ und addiert, so mufs nach (**54**) identisch Null herauskommen. Dies ist aber nur möglich, wenn die (3) besteht.

Anstatt die Constanten in (9) als Liniencoordinaten zu definieren, wie oben geschehen, kann man auch die negativen reciproken Werte der Abschnitte, welche die Projectionen (9) der Raumgeraden auf den Axen machen, als Coordinaten dieser und der Raumgeraden einführen. Bezeichnet man für eine jede Gerade die negativen reciproken Abschnitte ihrer Projectionen auf der $x$ Axe mit $u$, jene auf der $y$ Axe mit $v$, und jene auf der $z$ Axe mit $w$, und deutet durch Beisetzung von oberen Indices an, ob diese Abschnitte von der ersten, zweiten oder dritten Projection einer Raumgeraden gebildet werden; dann haben die Gleichungen der Projectionen die Form:

$$\begin{aligned} u'\,x + v'\,y + 1 &= o \\ w''\,z + u''\,x + 1 &= o \\ v'''\,y + w'''\,z + 1 &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

von deren Richtigkeit man sich durch Bildung der Abschnitte leicht überzeugt.

Eine Vergleichung der (10) mit den (9) liefert folgende Relationen:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{p_{24}}{p_{12}} & w'' &= \frac{p_{14}}{p_{13}} & v''' &= \frac{p_{34}}{p_{23}} \\ v' &= -\frac{p_{14}}{p_{12}} & u'' &= -\frac{p_{34}}{p_{13}} & w''' &= -\frac{p_{24}}{p_{23}} \end{aligned} \quad (11)$$

Sind nun $a'$, $b'$; $a''$, $c''$; $b'''$, $c'''$ die Abschnitte der Projectionen der Raumcoordinaten auf den Axen, ist also zufolge der Definition:

$$a'\,u' = a''\,u'' = b'\,v' = b'''\,v''' = c''\,w'' = c'''\,w''' = -1 \quad (12)$$

so lehrt eine Vergleichung der (11) mit den (6), dafs ist:

$$\begin{array}{lll} x' = a'' & z'' = c''' & y''' = b' \\ y' = b''' & x'' = a' & z''' = c'' \end{array}$$

ein Resultat, das sich auch unmittelbar aus Fig. 55 anschreiben läfst. Da aber die Durchstofspunkte auf den bezüglichen Projectionen der Raumgeraden liegen, so hat man die Identitäten:

$$\begin{aligned} u'\,a'' + v'\,b''' + 1 &= o \\ w''\,c''' + u''\,a' + 1 &= o \\ v'''\,b' + w'''\,c'' + 1 &= o \end{aligned}$$

oder wegen (12):

$$\begin{aligned} u'\,v''' + v'\,u'' - u''\,v''' &= o \\ u'\,w'' + u''\,w''' - u'\,w''' &= o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13) \\ w''\,v''' + w'''\,v' - v'\,w'' &= o \end{aligned}$$

Diese Identitäten gestatten die Coordinaten einer der drei Projectionen einer Raumgeraden zu berechnen, wenn die Coordinaten der beiden andern Projectionen gegeben sind. Substituiert man in die (13) die Werte der $u$, $v$, $w$ aus (11), so ergibt sich jedesmal die Identität (3).

Die sechs Zahlen $u'$, $v'$, $u''$, $w''$, $v'''$, $w'''$ eignen sich, wegen ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit und leichterer Handhabung bei der Construction, besser zur Bestimmung einer Raumgeraden als die Zahlen (1).

Wir haben daher noch folgende weitere Definition der Liniencoordinaten:

> **Unter den Coordinaten einer Raumgeraden versteht man die negativen reciproken Abschnitte, welche ihre drei orthogonalen Projectionen auf den Axen machen.**

## Übungsaufgaben.

1. Man stelle die Gleichung der Geraden auf, welche durch die beiden festen Punkte $(3, -4, 7)$; $(-2, 6, -8)$ bestimmt ist.

Aufl. Da die Richtungscosinuse der Geraden

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{350}} \qquad \cos\beta = \frac{-10}{\sqrt{350}} \qquad \cos\gamma = \frac{15}{\sqrt{350}}$$

sind, so hat man

$$x = 3 + \varrho\frac{5}{\sqrt{350}} \quad y = -4 - \varrho\frac{10}{\sqrt{350}} \quad z = 7 + \varrho\frac{15}{\sqrt{350}}$$

oder

$$x = -2 + \varrho\frac{5}{\sqrt{350}} \quad y = 6 - \varrho\frac{10}{\sqrt{350}} \quad z = -8 + \varrho\frac{15}{\sqrt{350}}$$

Die Elimination von $\varrho$ liefert beidesmal die Gleichungen

$$2x + y = 2 \qquad 3x - z = 2 \qquad 3y + 2z = 2$$

2. Man bestimme den Durchschnitt der drei zu den Coordinatenebenen senkrechten Ebenen:

| $\alpha)$ | $\beta)$ | $\gamma)$ |
|---|---|---|
| $3x + 2y + 5 = o$ | $2x - 3y + 7 = o$ | $3x + 2y - 4 = o$ |
| $4x - 5z + 2 = o$ | $5x + 2z - 6 = o$ | $x + 2z = o$ |
| $7y + 10z - 12 = o$ | $15y + 4z + 7 = o$ | $-5y + 15z + 10 = o$ |

Die Auflösungen der Gleichungen $(\alpha)$ sind:

$$x = \frac{-51}{5} \qquad y = \frac{64}{5} \qquad z = \frac{-195}{125}$$

Die Gleichungen $\beta)$ geben die Lösungen $x = y = z = \infty$. Die Gleichungen dreier mit den Ebenen $\beta)$ parallelen Ebenen, welche durch den Ursprung gehen, sind

$$2x - 3y = o \qquad 5x + 2z = o \qquad 15y + 4z = o$$

Diese drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, denn die eine dieser drei Gleichungen ist eine Folge der beiden andern. Der unendlich ferne Punkt dieser Geraden ist der Schnittpunkt der Ebenen $\beta)$.

Multipliciert man die erste der Gleichungen $\gamma)$ mit 1, die zweite mit 3 und subtrahiert, so ergibt sich die dritte Gleichung. Die $\gamma)$ stellen also eine Gerade dar.

3. Man bringe die Gleichungen

$$7x - 8y + 10 = o \qquad 9x + 12z - 15 = o$$

auf die Normalform.

Aufl. Die Gleichungen lassen sich auf die Form bringen:

$$\frac{y-\frac{5}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{z-\frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{x-o}{1}$$

Es ist also:

$$\cos\alpha = \mu \qquad \cos\gamma = -\mu\,\frac{3}{4} \qquad \cos\beta = \mu\,\frac{7}{8}$$

wo ist

$$\mu = \frac{8}{\sqrt{149}}$$

so dafs die Gleichungen in der Normalform folgende werden:

$$\frac{y-\frac{5}{4}}{\frac{7}{\sqrt{149}}} = \frac{z-\frac{5}{4}}{\frac{6}{\sqrt{149}}} = \frac{x}{\frac{8}{\sqrt{149}}} = \varrho$$

oder

$$y = \tfrac{5}{4} + \varrho\,\frac{7}{\sqrt{149}} \qquad z = \tfrac{5}{4} - \varrho\,\frac{6}{\sqrt{149}} \qquad x = \varrho\,\frac{8}{\sqrt{149}}$$

4. Man bestimme den Neigungswinkel der beiden Geraden

$$y = 5x + 7 \qquad y = 8x - 9$$
$$z = -3x - 2 \qquad z = 7x - 2$$

Es ist $\cos v = \dfrac{10}{3\sqrt{113}}$ wegen

$$\cos\alpha = \frac{-1}{6} \qquad \cos\beta = \frac{-5}{6} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{6}$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{113}} \qquad \cos\beta_1 = \frac{8}{\sqrt{113}} \qquad \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{113}}$$

5. Man untersuche ob die Geraden

$$\left.\begin{aligned} 3y - 6z + 15 &= o \\ 8x + z - 13 &= o \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 6y + 9z - 20 &= o \\ 2x + \tfrac{64}{3}y - 4 &= o \end{aligned}\right\}$$

zueinander senkrecht sind.

Aufl. Man bringe die Gleichungen auf die Form

$$y = \frac{6}{3}z - 5 \qquad y = -\frac{3}{2}z + \frac{10}{3}$$
$$x = -\frac{1}{8}z + \frac{13}{8} \qquad x = -16z - \frac{302}{9}$$

und wende (**56.**$_4$) an. Es ist

$$1 + Aa + A_1a_1 \equiv 1 - \frac{6}{3}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\cdot 16 \equiv o$$

also stehen die Geraden senkrecht aufeinander.

6. Sind die Geraden

$$2x + 5y + 9 = o \qquad 6y + 5z - 13 = o$$
$$\frac{48}{5}y + 8z - 20 = o \qquad 4x - \frac{25}{3}z - 10 = o$$

parallel zueinander?

Aufl. Die ersten Projectionen

$$2x + 5y + 9 = o \qquad +20x + 50y = -\frac{475}{3}$$

sind wegen $2 \cdot 50 - 5 \cdot 20 \equiv o$ parallel, und ebenso die dritten Projectionen

$$\frac{48}{5}y + 8z - 20 = o \qquad 6y + 5z - 13 = o$$

wegen $$\frac{48}{5} \cdot 5 - 6 \cdot 8 \equiv o$$

7. Welche Werte müssen in den Gleichungen

$$5y + \mu z = 10 \qquad 4x - \lambda y = 6$$
$$3x - 2y = 8 \qquad 7y + 9z = 7$$

die Constanten $\mu$ und $\lambda$ haben, damit die beiden Geraden $\alpha$) parallel, $\beta$) senkrecht zu einander sind?

Aufl. Man findet zur Bestimmung von $\lambda$ und $\mu$ die Gleichungen:

$$\alpha) \quad 8 - 3\lambda = o \qquad \beta) \quad 3\lambda\mu + 6\mu + 70 = o$$
$$45 - 7\mu = o$$

8. Welchen Wert mufs die Constante $A$ in der Gleichung $y = Ax + 5$ haben, damit die beiden Geraden:

$$y = Ax + 5 \qquad y = 2x - 4$$
$$z = 5x - 2 \qquad z = 3x + 7$$

sich schneiden und welches sind die Coordinaten des Schnittpunktes?

Aufl. Man findet:

$$A = 4 \qquad x = \frac{-9}{2} \qquad y = 13 \qquad z = \frac{49}{2}$$

9. Man lege durch den Punkt $(o, -5, 6)$ eine Gerade, welche die Gerade

$$y = 10x - 12 \qquad z = 5x + 8$$

schneidet.

Aufl. Die Gleichungen der gesuchten Geraden haben die Form

$$y = \lambda x - 5 \qquad z = \mu x + 6$$

Damit diese Gerade die gegebene Gerade schneide, ist erforderlich, dafs sei:

$$2\lambda + 7\mu - 55 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Es sind also

$$y = \lambda x - 5 \qquad z = \frac{55 - 7\lambda}{7}x + 6$$

die Gleichungen einer solchen Geraden. Die Horizontal- und umgeklappten Vertikalprojectionen schneiden sich auf der Geraden, deren Gleichung durch Elimination von $\lambda$ und $\mu$ aus

$$y = \lambda x - 5 \qquad -y = \mu x + 6$$

und $(m)$ erhalten wird. Sie ist also:

$$55x + 5y + 32 = 0$$

10. Haben die in der vorigen Aufgabe auftretenden Strahlbüschel einen Strahl gemein, und welches ist derselbe? Wenn der feste Punkt nicht auf der $yz$ Ebene liegt, ist dann der Durchschnitt beider Strahlbüschel ebenfalls eine Gerade? In welcher Verwandtschaft stehen die beiden Strahlbüschel zueinander?

11. Man bestimme die Coordinaten der Durchstofspunkte der durch die beiden festen Punkte (5, 4, —3); (7, —8, 2) bestimmten Geraden.

Aufl. Man hat für irgend einen Punkt der Geraden:

$$x = \frac{5 + 7\lambda}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{4 - 8\lambda}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{-3 + 2\lambda}{1 + \lambda}$$

für den Durchstofspunkt in der $xy$ Ebene hat man:

$$\lambda = \frac{3}{2} \qquad x' = \frac{31}{5} \qquad y' = -\frac{16}{5}$$

für den Durchstofspunkt in der $xz$ Ebene:

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad x'' = \frac{17}{3} \qquad z'' = \frac{-4}{3}$$

und für den Durchstofspunkt in der $yz$ Ebene:

$$\lambda = -\frac{5}{7} \qquad y''' = 34 \qquad z''' = -\frac{31}{2}$$

12. Welches sind in der vorigen Aufgabe die sechs Zahlen, mit welchen die Gerade construiert werden kann?

Aufl. $\varrho = 13$ $\quad \cos\alpha = \frac{2}{13}$ $\quad \cos\beta = \frac{-12}{13}$ $\quad \cos\gamma = \frac{5}{13}$

$$\delta = \sqrt{5841} \qquad \cos\lambda = \frac{16}{\sqrt{5841}} \qquad \cos\mu = \frac{31}{\sqrt{5841}} \qquad \cos\nu = \frac{68}{\sqrt{5841}}$$

Legt man also durch den Ursprung eine Ebene, deren Normale mit den Axen die Winkel

$$\lambda = \arccos\frac{16}{\sqrt{5841}} \qquad \mu = \arccos\frac{31}{\sqrt{5841}} \qquad \nu = \arccos\frac{68}{\sqrt{5841}}$$

bildet und zieht man in dieser Ebene eine Gerade, deren Neigung gegen die Axen durch

$$\alpha = \arccos \frac{2}{13} \qquad \beta = \arccos \frac{-12}{13} \qquad \gamma = \arccos \frac{5}{13}$$

sind, dann ist die in derselben Ebene gezogene parallele Gerade, welche von der so eben gezogenen den Abstand $\sqrt{5841} : 13$ hat, die gesuchte.

13. Man bestimme die Constanten in den Gleichungen

$$y = ax + b \qquad z = Ax + B$$

so, dafs die Gerade durch den Punkt $(3, 5, -2)$ gehe und mit den Axen die Winkel $\alpha = 45^0 \quad \beta = 60^0 \quad \gamma = 60^0$ bildet.

Aufl. Damit die Gerade durch den Punkt gehe, müssen die Constanten in ihren Gleichungen so bestimmt werden, dafs

$$5 = 3a + b \qquad -2 = 3A + B$$

ist. Damit die Gerade die angegebene Richtung habe, mufs

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + A^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + A^2}} = \tfrac{1}{2} \qquad \frac{A}{\sqrt{1 + a^2 + A^2}} = \tfrac{1}{2}$$

sein. Daraus folgt $A = a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ Folglich hat man $b = 5 - 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ $B = -2 - 3\sqrt{\frac{1}{2}}$, so dafs die Gleichungen der Geraden werden:

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, x + 5 - 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, x - 2 - 3\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

14. Es sollen die Constanten in den Gleichungen

$$y = px + q \qquad z = mx + n$$

so bestimmt werden, dafs die Gerade durch den festen Punkt $(4, -3, 2)$ gehe und mit den Geraden

$$y = 5x - 10 \qquad z = 7x + 9$$

$\alpha)$ parallel sei, $\beta)$ auf ihr senkrecht stehe.

Aufl. Die erste Bedingung der Aufgabe $\alpha)$ erfordert die Gleichungen $-3 = 4p + q \qquad 2 = 4m + n$

die zweite, dafs sei $p = 5 \qquad m = 7,$ so dafs also $q = -23$ und $n = -26$ wird, und somit

$$y = 5x - 23 \qquad z = 7x - 26$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden sind. Die erste Bedingung der Aufgabe $\beta)$ ist dieselbe wie bei $\alpha)$, die zweite ist erfüllt durch

$$1 + 5p + 7m = 0$$

Es ist also

$$q = -3 - 4p \qquad m = -\frac{1 + 5p}{7} \qquad n = \frac{18 + 20p}{7}$$

so dafs also

$$y = px - 4p - 3 \qquad z = -\frac{1 + 5p}{7}\, x + \frac{18 + 20p}{7}$$

die Gleichungen der Geraden im Falle $\beta$) sind. Die Horizontal- und Vertikalprojectionen der letzteren schneiden sich auf der Geraden

$$x - 2y - 3 = o$$

15. Es sollen die Gleichungen aller Geraden aufgestellt werden, welche die Geraden:

$$y = 5x - 7 \qquad y = 3x + 9$$
$$z = 4x + 8 \qquad z = 2x - 3$$

schneiden.

Aufl. Damit die Gerade

$$y = \lambda x + m \qquad z = \mu x + n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \quad .$$

die gegebenen Geraden schneide, müssen folgende Bedingungen von $\lambda$, $\mu$, $m$, $n$ erfüllt werden:

$$\begin{aligned} n\lambda - m\mu - 8\lambda - 7\mu + 4m - 5n + 68 &= o \\ n\lambda - m\mu + 3\lambda + 9\mu + 2m - 3n - 27 &= o \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es sind also

$$\begin{aligned} n(y - 5x + 7) - m(z - 4x - 8) - (8y + 7z - 68) &= o \\ n(y - 3x - 9) - m(z - 2x + 3) - (3y + 9z - 27) &= o \end{aligned} \quad . \quad (3)$$

die Gleichungen der Geraden.

16. Man suche unter den zweifach unendlich vielen Geraden der vorigen Aufgabe diejenige aus, welche durch den festen Punkt (3, —5, 2) geht.

Aufl. Man hat in den zuletzt aufgestellten Gleichungen der vorigen Nummer zu setzen $x = 3$, $y = -5$, $z = 2$ und die Gleichungen nach $m$ und $n$ aufzulösen. Dies gibt zunächst:

$$13n + 18m + 87 = o \qquad 23n + m + 24 = o$$

woraus folgt:

$$n = -\frac{345}{401} \qquad m = -\frac{1689}{401}$$

Die Gleichungen für $\lambda$ und $\mu$ sind also:

$$\begin{aligned} 3242\lambda + 4496\mu + 6756 &= o \\ 1169\lambda - 13512\mu + 13170 &= o \end{aligned}$$

Die hieraus sich ergebenden Werte von $\lambda$ und $\mu$ und die unmittelbar vorher gefundenen Werte von $m$ und $n$, in (1) eingesetzt, liefern die Gleichungen der Geraden. Man kann aber auch von der Berechnung von $\lambda$ und $\mu$ Abstand nehmen und lediglich die gefundenen Werte von $m$ und $n$ in (3) einsetzen, und aus den so entstehenden Gleichungen nacheinander $y$ und $z$ eliminieren, um das gleiche Resultat zu erhalten.

17. Man führe den Nachweis, dafs die Gleichungen (**66.**$_6$) immer in die Form (**66.**$_7$) übergeführt werden können.

Aufl. Setzt man in den Bedingungsgleichungen (**66.**$_3$):

$$\lambda - A = \varrho\ (m - B) \qquad \mu - A_1 = \varrho\ (n - B_1)$$
$$\lambda - a = \varrho'\ (m - b) \qquad \mu - a_1 = \varrho'\ (n - b_1)$$

so findet sich:

$$\lambda = A + \varrho\,(m - B) \qquad \lambda = a + \varrho'\,(m - b)$$
$$\mu = A_1 + \varrho\,(n - B_1) \qquad \mu = a_1 + \varrho'\,(n - b_1)$$

Setzt man diese Wertepaare $\lambda$, $\mu$ in (**66.**$_2$), so ergeben sich die Gleichungen:

$$y - Ax - m = \varrho\ (m - B)\ x$$
$$z - A_1 x - n = \varrho\ (n - B_1)\ x$$
$$y - ax - m = \varrho'\,(m - b)\ x$$
$$z - a_1 x - n = \varrho'\,(n - b_1)\ x$$

aus welchen durch Elimination von $\varrho$ und $\varrho'$ die Gleichungen (**66.**$_7$) hervorgehen.

18. Es soll der Nachweis geführt werden, dafs die Gleichung (**68.**$_6$) vom zweiten Grade in $x, y, z$ ist.

Aufl. Man substituiere statt $U$, $V$, $W$ ihre Werte; dann ergibt sich die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} y - Ax - B, & z - ax - b, & by - Bz - (aB - Ab)\,x \\ y - A_1 x - B_1, & z - a_1 x - b_1, & b_1 y - B_1 z - (a_1 B_1 - b_1 A_1)\,x \\ y - A_2 x - B_2, & z - a_2 x - b_2, & b_2 y - B_2 z - (a_2 B_2 - b_2 A_2)\,x \end{vmatrix} = o$$

welche leicht auf die Form gebracht wird:

$$x \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0, & -x, & -y \\ 0, & 1, & 0, & -x, & 0, & z \\ 1, & 0, & 0, & y, & z, & 0 \\ 1, & A, & a, & B, & b, & aB - bA \\ 1, & A_1, & a_1, & B_1, & b_1, & a_1 B_1 - b_1 A_1 \\ 1, & A_2, & a_2, & B_2, & b_2, & a_2 B_2 - b_2 A_2 \end{vmatrix} = o$$

In der Entwickelung derselben hebt sich das Glied mit $xyz$ fort. Die Gleichung ist also vom zweiten Grade in $x, y, z$, wenn man den Faktor $x$ weghebt.

19. Es sollen die Geraden bestimmt werden, welche die vier Geraden

$$y = 2x + 3 \qquad y = 3x - 2 \qquad y = 8x + 1 \qquad y = 4x - 9$$
$$z = x - 1 \qquad z = 2x + 5 \qquad z = x - 2 \qquad z = -x + 6$$

zugleich schneiden.

Aufl. Man hat die Gleichungen aufzulösen

$$m\mu - n\lambda - \lambda - 3\mu - m + 2n + 5 = o$$
$$m\mu - n\lambda + 5\lambda + 2\mu - 2m + 3n - 19 = o$$
$$m\mu - n\lambda - 2\lambda - \mu - m + 8n + 17 = o$$
$$m\mu - n\lambda + 6\lambda + 9\mu + m - n - 15 = o$$

Subtrahiert man dieselben paarweise, so ergeben sich die neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 6\lambda + 5\mu - m + n - 24 &= o \\ \lambda - 2\mu - 6n - 12 &= o \\ 7\lambda + 12\mu + 2m - 3n - 20 &= o \end{aligned}$$

aus welchen zunächst sich ergibt:

$$\lambda = \frac{77n + 200}{30} \qquad \mu = \frac{113n + 160}{-60} \qquad m = \frac{419n - 1440}{-60}$$

Setzt man diese Werte in eine der obigen Gleichungen, so resultiert die quadratische Gleichung in $n$:

$$47193\,n^2 - 94356\,n - 231460 = o$$

Sind $n_1$ und $n_2$ die Wurzeln dieser Gleichung und $\lambda_1, \lambda_2$; $\mu_1, \mu_2$; $m_1, m_2$ die ihnen entsprechenden Werte von $\lambda, \mu, m$; dann sind

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 x + m_1 & y &= \lambda_2 x + m_2 \\ z &= \mu_1 x + n_1 & z &= \mu_2 x + n_2 \end{aligned}$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden.

20. Man bestimme die Länge und Richtung des senkrechten Abstandes des Punktes $(-4, 5, -2)$ von der Geraden:

$$y = 5x - 7 \qquad z = 2x + 3$$

Aufl. Man bringe die Gleichungen der Geraden zunächst auf die Normalform:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-3}{3}$$

dann ist

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{30}} \qquad \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{30}} \qquad d = \sqrt{161}$$

$$a_1 - a = -4 \qquad b_1 - b = 12 \qquad c_1 - c = 1$$

Somit hat man

$$E^2 = \frac{21^2 + 20^2 + 58^2}{30} \qquad \sin v = \frac{E}{d}$$

21. Es seien die Zwischenrechnungen, welche bei Aufstellung der Formeln (**67.**$_{22}$) und den ihr folgenden erforderlich sind, durchzuführen.

Aufl. Es ist nach (**26**), dann (**67.**$_{17}$) und (**67.**$_{18}$):

$$\cos\alpha = \frac{x'' - x'}{d} = \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{\sqrt{t^2 - r\,s}}$$

$$\cos\beta = \frac{y'' - y'}{d} = \frac{\lambda'(x'' - x')}{d} = \lambda' \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{\sqrt{t^2 - r\,s}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z'' - z'}{d} = \frac{\mu'(x'' - x')}{d} = \mu' \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{\sqrt{t^2 - r\,s}}$$

Da aber $\lambda'$ und $\mu'$ die Werte ($16^a$) haben, andererseits die (**67.**$_{21}$) besteht, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{\sqrt{rs}\,\sin v} \qquad \cos\beta = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{rs}\,\sin v} \qquad \cos\gamma = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{rs}\,\sin v}$$

woraus mit Hilfe der (**67.**$_{20}$) die (**67.**$_{22}$) sich ergeben. Substituiert man endlich im Zähler des Bruches auf der rechten Seite von (**67.**$_{19}$):

$$a_1 - a_2 = \sqrt{rs}\,\sin v\cos\beta \qquad A_1 - A_2 = \sqrt{rs}\,\sin v\,\cos\gamma$$

so ergibt sich, da der Nenner $\sqrt{rs}\,\sin v$ ist, die Formel (**67.**$_{23}$) und, wenn man bedenkt, dafs ist:

$$\begin{vmatrix} b_1 - b_2, & \cos\gamma \\ B_1 - B_2, & \cos\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - b_2, & \cos\beta_1\cos\alpha_2 - \cos\beta_2\cos\alpha_1 \\ B_1 - B_2, & \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1 \end{vmatrix} : \sin v =$$

$$= \frac{1}{\sin v} \begin{vmatrix} o, & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2 \\ b_1 - b_2, & \cos\beta_1, & \cos\beta_2 \\ B_1 - B_2, & \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}$$

die (**67.**$_{24}$).

22. Es soll die Aufgabe, die kürzeste Entfernung der beiden Geraden

$$y = 3x - 2 \qquad y = 2x + 3$$
$$z = 4x + 1 \qquad z = x - 3$$

der Gröfse und Richtung nach zu bestimmen, durchgeführt werden.

Auf l. Nach (**67.**$_{10}$) findet man zunächst:

$$p = -1 \qquad q = 6 \qquad t = 11 \qquad r = 26 \qquad s = 6$$

und man hat somit für die Abscissen der Fusspunkte die Gleichungen

$$11\,x'' - 26\,x' - 1 = o$$
$$6\,x'' - 11\,x' + 6 = o$$

Hieraus findet sich

$$x' = -\frac{72}{95} \qquad x'' = -\frac{227}{95}$$

und durch Substitution in die gegebenen Gleichungen:

$$y' = -\frac{406}{95} \qquad y'' = -\frac{169}{95}$$
$$z' = -\frac{193}{95} \qquad z'' = -\frac{512}{95}$$

Die Entfernung $d$ der beiden Fufspunkte ist also:

$$d^2 = \frac{155^2 + 237^2 + 319^2}{95^2} = \frac{182955}{95^2}$$

Ferner ist

$$\cos\alpha = -\frac{155}{\sqrt{182955}} \qquad \cos\beta = \frac{237}{\sqrt{182955}} \qquad \cos\gamma = -\frac{319}{\sqrt{182955}}$$

23. Es sei die Gleichung des Hyperboloids aufzustellen, welches durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die an folgenden Geraden hingleitet:

$$y = 4x - 2 \qquad y = 2x - 5 \qquad y = 3x - 2$$
$$z = 3x + 5 \qquad z = 5x + 1 \qquad z = 2x - 5$$

Aufl. Zunächst hat man zu untersuchen, ob diese Geraden sich nicht schneiden. Ist dies geschehen, und findet man, dafs sie sich kreuzen, so ist die gesuchte Gleichung:

$$o = \begin{vmatrix} o, & o, & 1, & o, & -x, & -y \\ o, & 1, & o, & -x, & o, & z \\ 1, & o, & o, & y, & z, & o \\ 1, & 4, & 3, & -2, & +5, & -14 \\ 1, & 2, & 5, & -5, & +1, & -27 \\ 1, & 3, & 2, & -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} o, & o, & 1 \\ o, & 1, & o \\ 1, & o, & o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2, & 5, & -14 \\ 5, & 1, & -27 \\ 2, & -5, & 19 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} o, & o, & 1 \\ o, & 1, & o \\ 1, & 4, & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y, & z, & o \\ -5, & 1, & -27 \\ -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o, & o, & 1 \\ o, & 1, & o \\ 1, & 2, & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y, & z, & o \\ -2, & 5, & -14 \\ -2, & -5, & -19 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} o, & o, & 1 \\ o, & 1, & o \\ 1, & 3, & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y, & z, & o \\ -2, & 5, & -14 \\ -5, & 1, & -27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o, & o, & 1 \\ o, & 1, & o \\ 1, & 4, & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -5, & 1, & -27 \\ -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} o, & 1, & o \\ 1, & o, & o \\ 1, & 2, & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -2, & 5, & -14 \\ -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o, & 1, & o \\ 1, & o, & o \\ 1, & 3, & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -2, & 5, & -14 \\ -5, & 1, & -27 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1, & o, & o \\ 1, & 4, & 3 \\ 1, & 2, & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ y, & z, & o \\ -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1, & o \\ 1, & 4, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ y, & -z, & o \\ -5, & 1, & -27 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} o, & 1, & o \\ 1, & 2, & 5 \\ 1, & 3, & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ y, & z, & o \\ -2, & 5, & -14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & o, & o \\ 1, & 4, & 3 \\ 1, & 2, & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -x, & o, & z \\ -2, & -5, & 19 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1, & o, & o \\ 1, & 4, & 6 \\ 1, & 3, & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -x, & o, & z \\ -5, & 1, & -27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & o, & o \\ 1, & 2, & 5 \\ 1, & 3, & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -x, & o, & z \\ -2, & 5, & -14 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1, & 4, & 3 \\ 1, & 2, & 5 \\ 1, & 3, & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -x, & o, & z \\ y, & z, & o \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

Die Determinante $\begin{vmatrix} o, & -x, & -y \\ -x, & o, & z \\ y, & z, & o \end{vmatrix}$ ist identisch Null.

24. Welche Zwischenrechnungen sind erforderlich, um aus den (**68.**$_{11}$) durch Elimination von $x_3$ die (**68.**$_{12}$) herzustellen?

Aufl. Das Eliminationsresultat ist in Determinantenform geschrieben:

$$\begin{vmatrix} (A_3-A_2)\,x_2+(A_1-A_3)\,x_1+(B_1-B_2), & x_1x_2\,(A_2-A_1)+x_1\,(B_2-B_3)+x_2\,(B_3-B_1) \\ (a_3-a_2)\,x_2+(a_1-a_3)\,x_1+(b_1-b_2), & x_1x_2\,(a_2-a_1)+x_1\,(b_2-b_3)+x_2\,(b_3-b_1) \end{vmatrix}$$

Entwickelt man diese Determinante, so sind die Glieder 3ten Grades in $x_1$, $x_2$,

$$x_1x_2^2\begin{vmatrix} A_3-A_2, & A_2-A_1 \\ a_3-a_2, & a_2-a_1 \end{vmatrix}+x_1^2x_2\begin{vmatrix} A_1-A_3, & A_2-A_1 \\ a_1-a_3, & a_2-a_1 \end{vmatrix}=x_1x_2(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Die Glieder 2ten Grades sind:

$$x_2^2\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_3-B_1 \\ a_3-a_2, & b_3-b_1 \end{vmatrix}+x_1^2\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_2-B_3 \\ a_1-a_3, & b_2-b_3 \end{vmatrix}+$$

$$+x_1x_2\left\{\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_2-B_3 \\ a_3-a_2, & b_2-b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_3-B_1 \\ a_1-a_3, & b_3-b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} B_1-B_2, & A_2-A_1 \\ b_1-b_2, & a_2-a_1 \end{vmatrix}\right\}$$

Dieser Gliedercomplex verschwindet aber für $x_2=x_1$, denn es ist:

$$\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_3-B_1 \\ a_3-a_2, & b_3-b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_2-B_3 \\ a_3-a_2, & b_2-b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_2-B_1 \\ a_3-a_2, & b_2-b_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_2-B_3 \\ a_1-a_3, & b_2-b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_3-B_1 \\ a_1-a_3, & b_3-b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_2-B_1 \\ a_1-a_3, & b_2-b_1 \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} B_2-B_1, & A_3-A_2 \\ b_2-b_1, & a_3-a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} B_2-B_1, & A_1-A_3 \\ b_2-b_1, & a_1-a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_2-B_1, & A_1-A_2 \\ b_2-b_1, & a_1-a_2 \end{vmatrix}$$

Somit zerfällt der Complex der Glieder zweiten Grades in Factoren, wovon der eine $x_2-x_1$ ist, so dafs der Complex also die Form hat:

$$(x_2-x_1)\left\{x_2\begin{vmatrix} A_3-A_2, & B_3-B_1 \\ a_3-a_2, & b_3-b_1 \end{vmatrix}-x_1\begin{vmatrix} A_1-A_3, & B_2-B_3 \\ a_1-a_3, & b_2-b_3 \end{vmatrix}\right\}$$

Die Glieder 1ten Grades endlich sind:

$$x_2\begin{vmatrix} B_1-B_2, & B_3-B_1 \\ b_1-b_2, & b_3-b_1 \end{vmatrix}+x_1\begin{vmatrix} B_1-B_2, & B_2-B_3 \\ b_1-b_2, & b_2-b_3 \end{vmatrix}=(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

25. Es soll untersucht werden, ob in dem System von Geraden, welches drei feste Gerade schneidet, solche vorkommen, welche parallel den Coordinatenebenen sind.

Aufl. Für eine Gerade, die parallel mit der $yz$ Ebene ist, hat man $x_1=x_2=x_3$ und somit zur Bestimmung des Abstandes der Geraden von dieser Ebene die Gleichung nach (**68.**$_{12}$):

$$\gamma x_1^2+(\alpha+\delta)\,x_1+\beta=0$$

und nach (**68.**$_{14}$) die Gleichung

$$\gamma x_1^2+(\alpha'+\delta')\,x_1+\beta=0$$

Für Gerade, welche parallel der $xz$ Ebene sind, ergeben sich aus (**68.**$_{18}$) für $y_1 = y_3$ die Gleichungen

$$\gamma_1 y_1^2 + (\alpha_1 + \delta_1) y_1 + \beta_1 = o$$
$$\gamma_1 y_1^2 + (\alpha_1' + \delta_1') y_1 + \beta_1 = o$$

und für Gerade die parallel der $xy$ Ebene sind nach (**68.**$_{21}$) für $z_1 = z_2 = z_3$ die Gleichungen

$$\gamma_2 z_1^2 + (\delta_2 + \alpha_2) z_1 + \beta_2 = o$$
$$\gamma_2 z_1^2 + (\delta_2' + \alpha_2') z_1 + \beta_2 = o$$

Die Gleichungen eines jeden Paares ergeben wegen (**68.**$_{22}$) dieselben Wurzeln.

Man kann auch auf folgende Weise verfahren: Für eine Gerade $L$ parallel der $xy$ Ebene mufs nach (**68.**$_{23}$):

$$\mu_1' x_1^2 + \mu_2' x_1 + \mu_3' = o$$

sein, für eine Gerade $L$ parallel der $xz$ Ebene nach (**68.**$_{24}$):

$$\mu_1'' x_1^2 + \mu_2'' x_1 + \mu_3'' = o$$

und für eine Gerade parallel mit der $yz$ Ebene nach (**68.**$_{25}$):

$$\mu_1''' x_1^2 + \mu_2''' x_1 + \mu_3''' = o$$

Bestehen zwei dieser Gleichungen gleichzeitig, so ist die Gerade $L$ parallel mit einer Coordinatenaxe. Es ist hierzu also eine Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten erforderlich.

26. Welche Werte haben die Coëfficienten in den Formeln (**68.**$_{23}$) für die Geraden:

| | | |
|---|---|---|
| $y = 5x + 2$ | $y = 4x + 1$ | $y = 7x + 3$ |
| $z = 3x - 1$ | $z = 2x - 3$ | $z = 3x + 2$ |

Aufl. Es ist

$$\lambda_1' = \alpha (a_1 - a_2) + b_2 \gamma \qquad \mu_1' = -\alpha_1 \gamma$$
$$\lambda_2' = \beta (a_1 - a_2) + b_2 \delta + b_1 \alpha \qquad \mu_2' = (b_2 - b_1) \gamma - a_2 \alpha - a_1 \delta$$
$$\lambda_3' = b_1 \beta \qquad \mu_3' = -\alpha_2 \beta - (b_1 - b_2) \delta$$

$$\nu_1' = \alpha (A_2 a_1 - A_1 a_2) + \gamma (A_1 b_2 - a_1 B_2)$$
$$\nu_2' = \beta (a_1 A_2 - A_1 a_2) + \delta (A_1 b_2 - a_1 B_2) - \alpha (a_2 B_1 - b_1 A_2) + \gamma (b_2 B_1 - b_1 B_2)$$
$$\nu_3' = \beta (b_1 A_2 - a_2 B_1) + \delta (b_2 B_1 - b_1 B_2)$$

Nun ist zunächst nach (**68.**$_{13}$)

$$\alpha = \begin{vmatrix} -2, & 2 \\ 0, & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \beta = \begin{vmatrix} -1, & 1 \\ -2, & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad \gamma = \begin{vmatrix} -1, & +2 \\ -1, & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 1, & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Daher hat man

$$\lambda_1' = -16 \qquad \mu_1' = -6 \qquad \nu_1' = -56$$
$$\lambda_2' = -15 \qquad \mu_2' = -8 \qquad \nu_2' = -76$$
$$\lambda_3' = +1 \qquad \mu_3' = -6 \qquad \nu_3' = -32$$

Somit sind die Coordinaten eines Punktes des Kegelschnittes, welcher der geometrische Ort der Durchstofspunkte der Schaar von Geraden ist, welche die gegebenen Geraden schneiden:

$$x = -\frac{1 - 15\,x_1 - 16\,x_1^2}{6 + 8\,x_1 + 6\,x_1^2}$$
$$y = \frac{16 + 38\,x_1 + 28\,x_1^2}{3 + 4\,x_1 + 3\,x_1^2}$$

Die Coëfficienten in den Ausdrücken (**68.**$_{24}$) und (**68.**$_{25}$) werden aus den obigen durch einfache Vertauschung der Indices erhalten.

27. Welches sind die Gleichungen der Kegelschnitte, in welchen das System der Geraden, welches durch drei feste Gerade bestimmt ist, die Coordinatenebenen durchsetzt?

Aufl. Man kann die Gleichungen (**68.**$_{23}$) auch wie folgt schreiben:

$$\varrho\,x = \lambda_1' x_1^2 + \lambda_2' x_1 + \lambda_3'$$
$$\varrho\,y = \nu_1' x_1^2 + \nu_2' x_1 + \nu_3'$$
$$\varrho = \mu_1' x_1^2 + \mu_2' x_1 + \mu_3'$$

und wenn man aufserdem jede mit $x_1$ multipliciert, ergeben sich noch die drei Gleichungen:

$$\varrho\,x\,x_1 = \lambda_1' x_1^3 + \lambda_2' x_1^2 + \lambda_3' x_1$$
$$\varrho\,y\,x_1 = \nu_1' x_1^3 + \nu_2' x_1^2 + \nu_3' x_1$$
$$\varrho\,x_1 = \mu_1' x_1^3 + \mu_2' x_1^2 + \mu_3' x_1$$

Aus diesen sechs Gleichungen eliminiert man nun die Gröfsen $\varrho$, $x_1$, $x_1^2$, $x_1^3$, $x_1^0$, $\varrho\,x_1$. Dies gibt:

$$\begin{vmatrix} x, & o, & \lambda_3', & \lambda_2', & \lambda_1', & o \\ y, & o, & \nu_3', & \nu_2', & \nu_1', & o \\ 1, & o, & \mu_3', & \mu_2', & \mu_1', & o \\ o, & x, & o, & \lambda_3', & \lambda_2', & \lambda_1' \\ o, & y, & o, & \nu_3', & \nu_2', & \nu_1' \\ o, & 1, & o, & \mu_3', & \mu_2', & \mu_1' \end{vmatrix} = o$$

Auf gleiche Weise oder durch einfache Coëfficientenvertauschung findet man die Gleichungen der zwei andern Kegelschnitte. Man kann auch auf folgende Weise zu den Gleichungen der betreffenden Kegelschnitte gelangen.

Man bringe zuerst die (**68.**$_{23}$) auf die Form:

$$x_1^2 (\mu_1' x - \lambda_1') + x_1 (\mu_2' x - \lambda_2') + \mu_3' x - \lambda_3' = o$$
$$x_1^2 (\mu_1' y - \nu_1') + x_1 (\mu_2' y - \nu_2') + \mu_3' y - \nu_3' = o$$

und löse dieselben nach $x_1^2$ und $x_1$ auf. Als Eliminationsresultat findet man dann:

$$\begin{vmatrix} \mu_3' x - \lambda_3', & \mu_2' x - \lambda_2' \\ \mu_3' y - \nu_3', & \mu_2' y - \nu_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_1' x - \lambda_1', & \mu_2' x - \lambda_2' \\ \mu_1' y - \nu_1', & \mu_2' y - \nu_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mu_1' x - \lambda_1', & \mu_3' x - \lambda_3' \\ \mu_1' y - \nu_1', & \mu_3' y - \nu_3' \end{vmatrix}^2 = 0$$

Nun ist aber:

$$\begin{vmatrix} \mu_3' x - \lambda_3', & \mu_2' x - \lambda_2' \\ \mu_3' y - \nu_3', & \mu_2' y - \nu_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \mu_3', & \mu_2' \\ x, & \lambda_3', & \lambda_2' \\ y, & \nu_3', & \nu_2' \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \mu_1' x - \lambda_1', & \mu_2' x - \lambda_2' \\ \mu_1' y - \nu_1', & \mu_2' y - \nu_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \mu_1', & \mu_2' \\ x, & \lambda_1', & \lambda_2' \\ y, & \nu_1', & \nu_2' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1' x - \lambda_1', & \mu_3' x - \lambda_3' \\ \mu_1' y - \nu_1', & \mu_3' y - \nu_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \mu_1', & \mu_3' \\ x, & \lambda_1', & \lambda_3' \\ y, & \nu_1', & \nu_3' \end{vmatrix}$$

Daher wird die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1, & \mu_3', & \mu_2' \\ x, & \lambda_3', & \lambda_2' \\ y, & \nu_3', & \nu_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & \mu_1', & \mu_2' \\ x, & \lambda_1', & \lambda_2' \\ y, & \nu_1', & \nu_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & \mu_1', & \mu_3' \\ x, & \lambda_1', & \lambda_3' \\ y, & \nu_1', & \nu_3' \end{vmatrix}^2 = 0$$

Die Gleichungen der geometrischen Örter der Durchstofspunkte in der $xz$, beziehungsweise $yz$ Ebene sind:

$$\begin{vmatrix} 1, & \mu_3'', & \mu_2'' \\ x, & \lambda_3'', & \lambda_2'' \\ z, & \nu_3'', & \nu_3'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & \mu_1'', & \mu_2'' \\ x, & \lambda_1'', & \lambda_2'' \\ z, & \nu_1'', & \nu_2'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & \mu_1'', & \mu_3'' \\ x, & \lambda_1'', & \lambda_3'' \\ z, & \nu_1'', & \nu_3'' \end{vmatrix}^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1, & \mu_3''', & \mu_2''' \\ y, & \lambda_3''', & \lambda_2''' \\ z, & \nu_3''', & \nu_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & \mu_1''', & \mu_2''' \\ y, & \lambda_1''', & \lambda_2''' \\ z, & \nu_1''', & \nu_2''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & \mu_1''', & \mu_3''' \\ y, & \lambda_1''', & \lambda_3''' \\ z, & \nu_1''', & \nu_3''' \end{vmatrix}^2 = 0$$

28. Man weise die Richtigkeit der Gleichung (**68.**$_{15}$) nach.

Aufl. Es ist

$$\delta' - \delta = \begin{vmatrix} A_2 - A_3, & B_2 - B_3 \\ a_2 - a_3, & b_2 - b_3 \end{vmatrix} \quad \alpha - \alpha' = \begin{vmatrix} A_2 - A_3, & B_3 - B_3 \\ a_2 - a_3, & b_2 - b_3 \end{vmatrix}$$

$\delta'$ und $\alpha'$ selbst findet man durch Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} (A_3 - A_2)x_3 + (A_2 - A_1)x_1 + (B_3 - B_1), & (A_1 - A_3)x_1 x_3 + (B_1 - B_2)x_3 + (B_2 - B_1)x_1 \\ (a_3 - a_2)x_3 + (a_2 - a_1)x_1 + (b_3 - b_1), & (a_1 - a_3)x_1 x_3 + (b_1 - b_2)x_3 + (b_2 - b_1)x_1 \end{vmatrix}$$

auf dieselbe Weise, wie in Aufg. 24.

29. Welches sind die Constanten in (**68.**$_{18}$) und (**68.**$_{21}$)?

Aufl.

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} P_1 - P_3, & Q_3 - Q_2 \\ p_1 - p_3, & q_3 - q_2 \end{vmatrix} \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} P_3 - P_1, & Q_3 - Q_1 \\ p_3 - p_1, & q_3 - q_1 \end{vmatrix} \quad \delta_1' = \begin{vmatrix} P_2 - P_3, & Q_2 - Q_1 \\ p_2 - p_3, & q_2 - q_1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1' = \begin{vmatrix} P_2 - P_1, & Q_2 - Q_3 \\ p_2 - p_1, & q_2 - q_2 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} R_1 - R_3, & S_3 - S_2 \\ r_1 - r_3, & s_3 - s_2 \end{vmatrix} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} R_3 - R_1, & S_3 - S_1 \\ r_3 - r_1, & s_3 - s_1 \end{vmatrix} \quad \delta_2' = \begin{vmatrix} R_2 - R_3, & S_2 - S_1 \\ r_2 - r_3, & s_1 - s_1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2' = \begin{vmatrix} R_2 - R_1, & S_2 - S_3 \\ r_2 - r_1, & s_2 - s_3 \end{vmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ R_1, & R_2, & R_3 \\ r_1, & r_2, & r_3 \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ S_1, & S_2, & S_3 \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix}$$

Man kann auch wie folgt verfahren:

Es ist

$$x_1 = \frac{y_1 - B_1}{A_1} \qquad x_2 = \frac{y_2 - B_2}{A_2} \qquad x_3 = \frac{y_3 - B_3}{A_3}$$

und durch Substitution dieser Werte in (**68.**$_{12}$) und (**68.**$_{14}$):

$$\gamma\,(y_1 - B_1)\,(y_2 - B_2) + \delta\ A_1\,(y_2 - B_2) + \alpha\ A_2\,(y_1 - B_1) + \beta\,A_1\,A_2 = o$$
$$\gamma\,(y_1 - B_1)\,(y_3 - B_3) + \delta'\,A_1\,(y_3 - B_3) + \alpha'\,A_3\,(y_1 - B_1) + \beta\ A_1\,A_3 = o$$

Es ist also $\gamma_1 = \gamma$ und

$$\beta_1 = \beta\,A_1\,A_2 + \gamma\,B_1\,B_2 - \delta\,A_1\,B_2 - \alpha\,A_2\,B_1$$
$$\alpha_1 = \alpha\,A_2 - \gamma\,B_2 \qquad \delta_1 = \delta\,A_1 - \gamma\,B_1$$

Ferner $\gamma_1' = \gamma$ und

$$\beta_1' = \beta\,A_1\,A_3 + \gamma\,B_1\,B_3 - \delta'\,A'\,B_3 - \alpha'\,A_3\,B_1$$
$$\alpha_1' = \alpha'\,A_3 - \gamma\,B_3 \qquad \delta_1' = \delta'\,A_1 - \gamma\,B_1$$

Berechnet man endlich aus den (**68.**$_{10}$) die $x$ als Funktionen der $z$ und substituiert dieselben in (**68.**$_{12}$) und (**68.**$_{14}$), so findet man zunächst:

$$x_1 = \frac{z_1 - b_1}{a_1} \qquad x_2 = \frac{z_2 - b_2}{a_2} \qquad x_3 = \frac{z_3 - b_3}{a_3}$$

und dann

$$\gamma\,(z_1 - b_1)\,(z_2 - b_2) + \delta\ a_1\ (z_2 - b_2) + \alpha\,a_2\ (z_1 - b_1) + \beta\,a_1\ a_2 = o$$
$$\gamma\,(z_1 - b_1)\,(z_3 - b_3) + \delta'\,a_1\ (z_3 - b_3) + \alpha'\,\alpha_3\,(z_1 - b_1) + \beta\ a_1\,a_3 = o$$

Man hat daher $\gamma_2 = \gamma$

$$\beta_2 = \beta\,a_1\,a_2 + \gamma\,b_1\,b_2 - \delta\,a_1\,b_2 + \alpha\,a_2\,b_1$$
$$\alpha_2 = \alpha\,a_2 - \gamma\,a_2 \qquad \delta_2 = \delta\,a_1 - \gamma\,b_1$$

und $\gamma_2' = \gamma$, sowie

$$\beta_2' = \beta\ a_1\,a_3 + \gamma\,b_1\,b_3 - \delta'\,a_1\,b_3 - \alpha'\,a_3\,b_1$$
$$\alpha_2' = \alpha'\,a_3 - \gamma\,b_3 \qquad \delta_2' = \delta'\,a_1 - \gamma\,b_1$$

30. Man berechne die Constanten $\beta_1$, $\gamma_1$, $\beta_2$ und $\gamma_2$ als Funktionen der Constanten (**68.**$_{10}$):

Aufl. Benützt man die (**68.**$_{17}$), so wird:

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{b_1 A_1 - a_1 B_1}{A_1}, & \dfrac{b_2 A_2 - a_2 B_2}{A_2}, & \dfrac{b_3 A_3 - a_3 B_3}{A_3} \\ -\dfrac{B_1}{A_1}, & -\dfrac{B_2}{A_2}, & -\dfrac{B_3}{A_3} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{A_1 A_2 A_3} \begin{vmatrix} b_1 A_1 - a_1 B_1, & b_2 A_2 - a_2 B_2, & b_3 A_3 - a_3 B_3 \\ B_1, & B_2, & B_3, \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{A_1}, & \frac{1}{A_2}, & \frac{1}{A_3} \\ \frac{a_1}{A_1}, & \frac{a_2}{A_2}, & \frac{a_3}{A_3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{A_1 A_2 A_3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} \frac{b_1 A_1 - a_1 B_1}{a_1}, & \frac{b_2 A_2 - a_2 B_2}{a_2}, & \frac{b_3 A_3 - a_3 B_3}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_1}, & -\frac{b_2}{a_2}, & -\frac{b_3}{a_3} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{a_1 a_2 a_3} \begin{vmatrix} b_1 A_1 - a_1 B_1, & b_2 A_2 - a_2 B_2, & b_3 A_3 - a_3 B_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{a_1}, & \frac{1}{a_2}, & \frac{1}{a_3} \\ \frac{A_1}{a_1}, & \frac{A_2}{a_2}, & \frac{A_3}{a_3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_1 a_2 a_3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{vmatrix}$$

Es ist also

$$\gamma_2 = -\frac{A_1 A_2 A_3}{a_1 a_2 a_3} \gamma_1$$

Fig. 1.

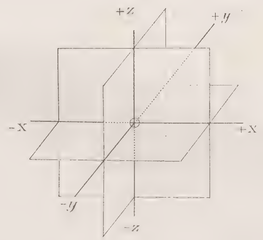



Fig. 2

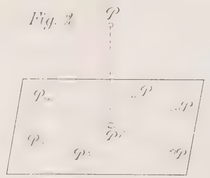


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

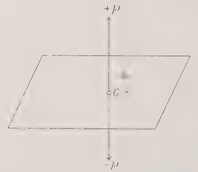



Fig. 6

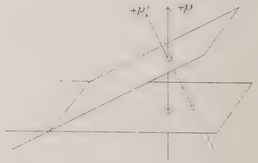



Fig. 7

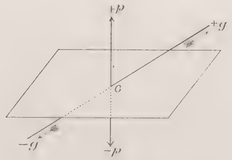



Fig. 8

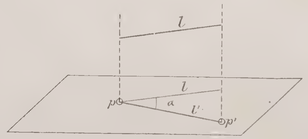



Fig. 9

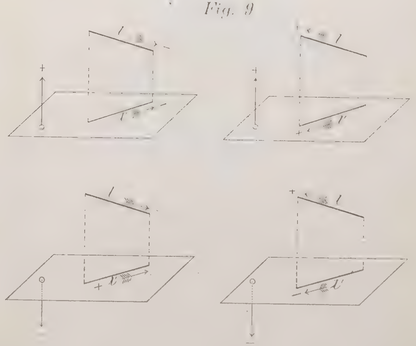



Fig. 10

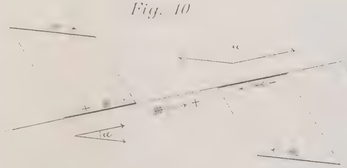



Fig. 11

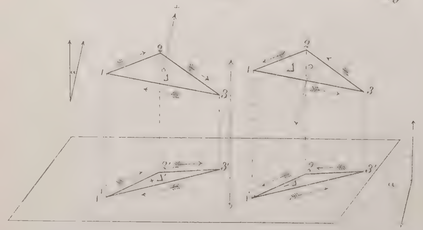


Fig. 12

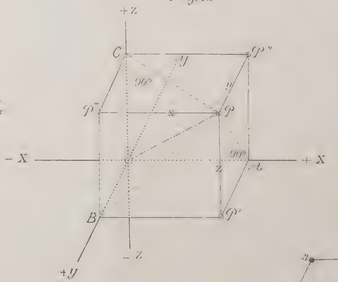
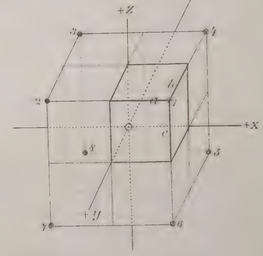
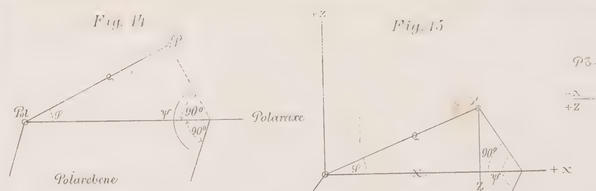


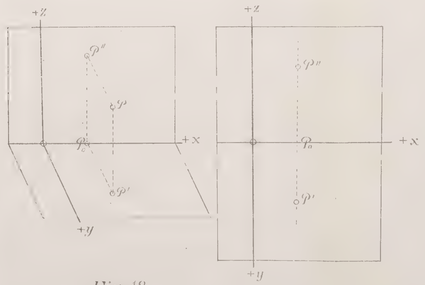

Fig. 13

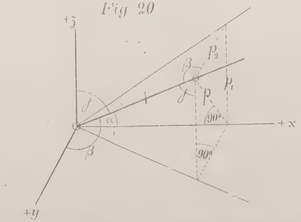


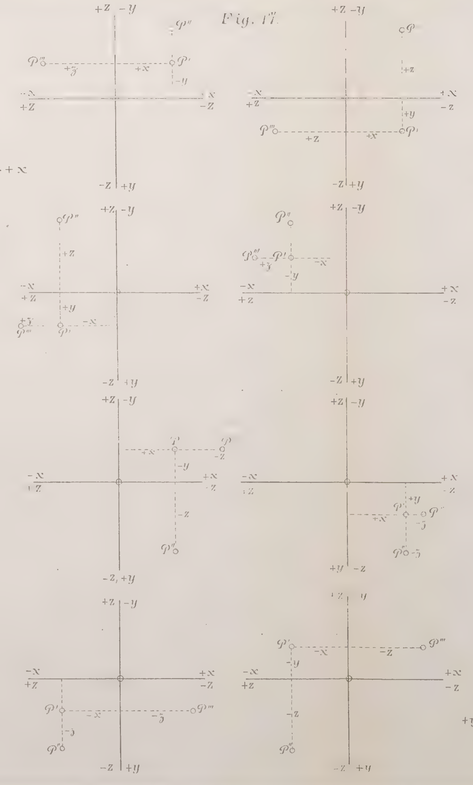


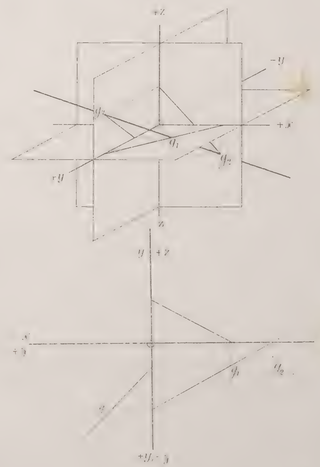


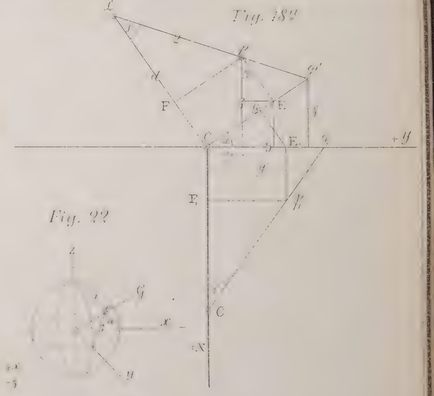


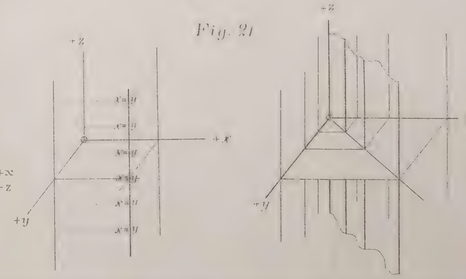


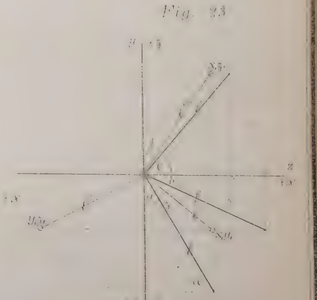




Schüler, Geometrie des Raumes.

Fig. 24.

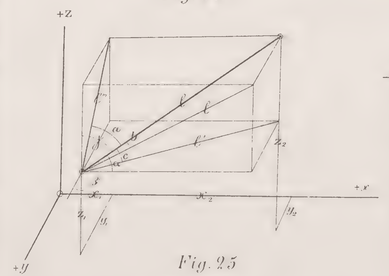


Fig. 25

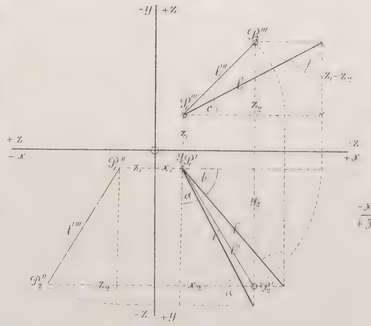


Fig. 26

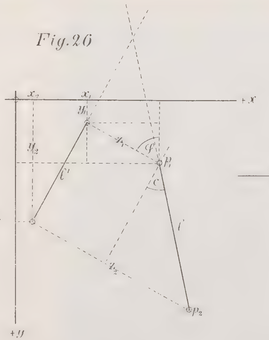


Fig. 27

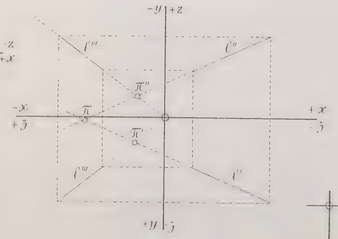


Fig. 29

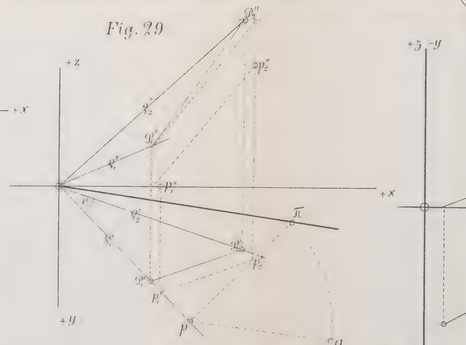


Fig. 28

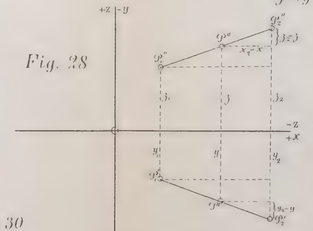


Fig. 30

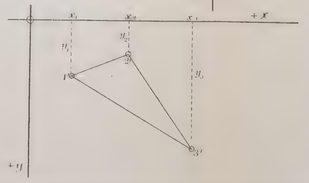


Fig. 49a

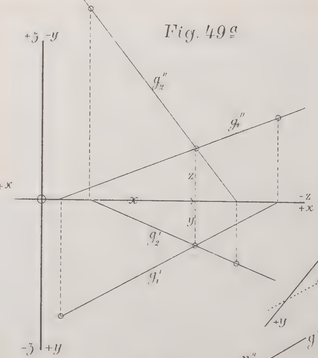


Fig. 49

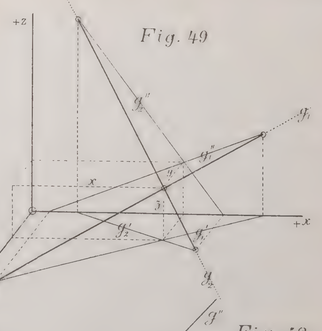


Fig. 50

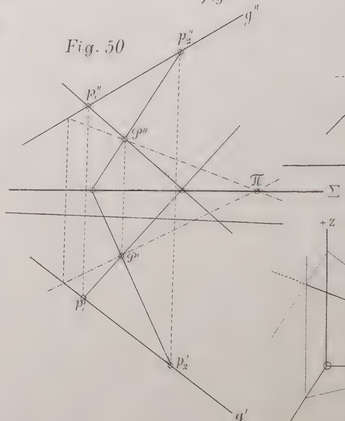


Fig. 32

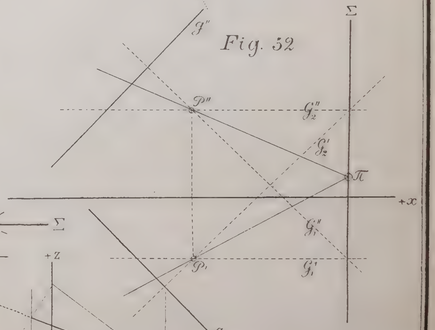
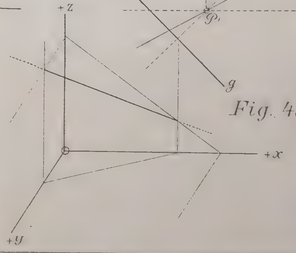


Fig. 48



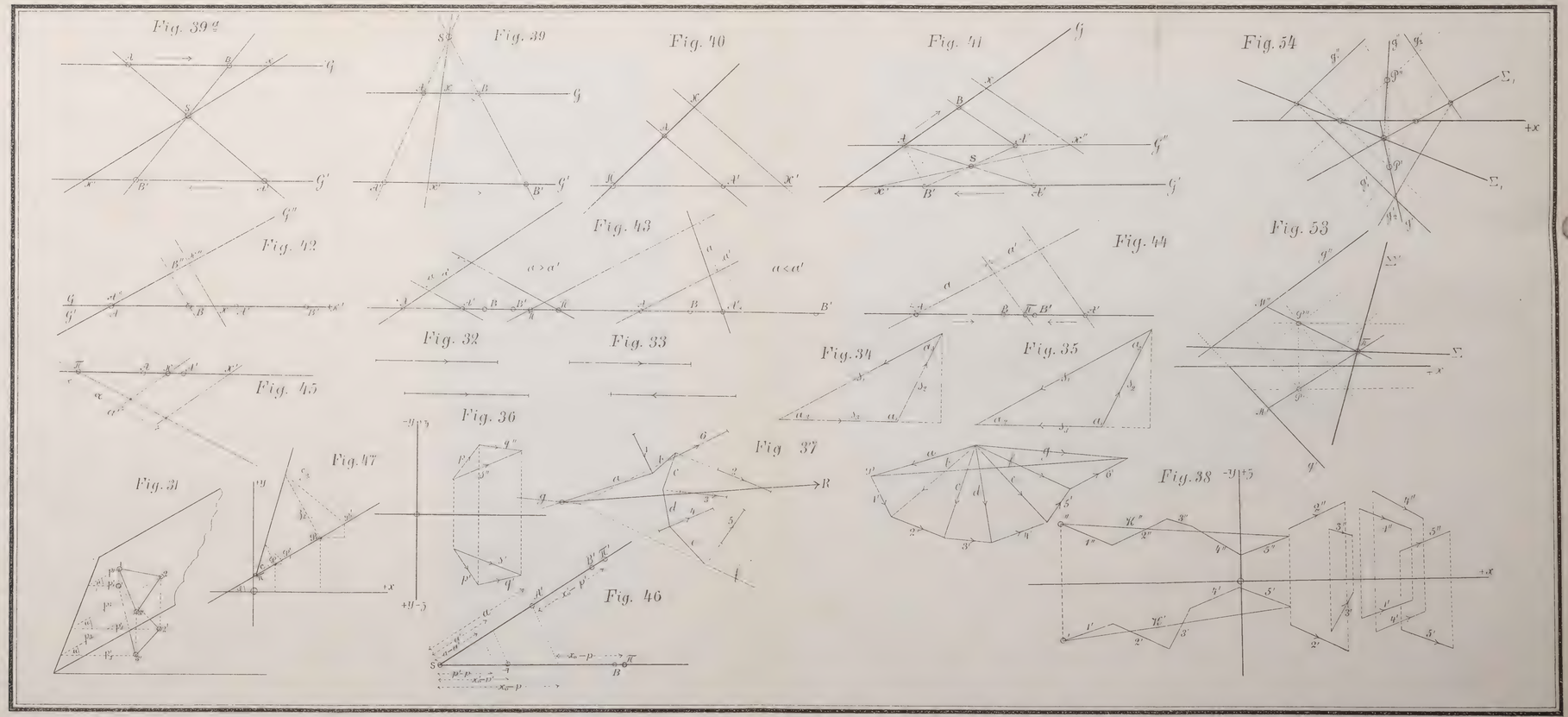


Fig. 39a
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 54
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 53
Fig. 45
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 31
Fig. 47
Fig. 46
Fig. 38

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schüler, Wilhelm Friedrich,

Analytische Geometrie des Raumes nebst den Prinzipien der darstellenden Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Imaginären zum Gebrauche an technischen Hochschulen und höheren technischen Schulen, sowie zum Selbstunterricht ; mit zahlreichen Übungsaufgaben nebst Auflösungen
Bd.: 1,1

1884

Math.p. 514 f-1,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651687-2